

Az eloszlásfüggvény

Számok tetszőleges $x_1, x_2, \dots, x_n$ összességét számcsoporthoz nevezzük. Számcsoporthoz alkotnak például a dobókocka hat lapján található számok, a lottó e heti nyerőszámai, egy tanuló félévi osztályzatai, vagy egy osztály tanulói által egy nap szerzett jegyek. A számcsoporthoz tagjainak a sorrendje nem lényeges, de az esetleges ismétlődések nem elhanyagolhatóak. Az $x_1, x_2, \dots, x_n$ számcsoporthoz röviden ξ -vel jelöljük, az elemek számát $G(\xi)$ -vel (jelölésünk mellett tehát $G(\xi) = n$). Egy adott számcsoporthoz esetén érdemes megvizsgálni, hol helyezkednek el a tagjai, hogy adott típusú számok közül hány tartozik a csoporthoz.

A $\xi = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ számcsoporthoz a valós számok tetszőleges H részhalmazához tartozó gyakorisága a számcsoporthoz azon tagjainak száma, amelyek H -nak elemei. Ezt a számot $G(\xi \in H)$ -val jelöljük, és a mondott definíció formális alakja a következő:

$$G(\xi \in H) = \sum_{i=1}^n I(x_i, H),$$

ahol $I(x, H) = 1$, ha $x \in H$, és 0 különben. Ha a $\xi = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, és $\eta = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ számcsoporthoz tetszőleges H mellett ugyanaz a gyakoriság tartozik, akkor ξ azonos η -val. Ez nyilván csak úgy lehet, ha $n = m$, és az egyik számcsoporthoz megkaphatjuk a másiktól, ha a tagjait alkalmas módon átrendezzük.

Érdekes kérdés, hogy egy adott számcsoporthoz tagjait hányféle sorrendben írhatjuk fel. Ez attól függ, vannak-e egyformák a csoporthoz tagjai között, és ha igen, miből mennyi van. Ezt viszont a Quetelet-görbéről olvashatjuk le. Ha ebben a

$$q_1 < q_2 < \dots < q_j$$

számok fordulnak elő rendre

$$k_1, k_2, \dots, k_j$$

gyakoriságokkal (azaz $k_i = G(\xi = q_i)$, $i = 1, 2, \dots, j$), akkor a számcsoporthoz a lehetséges átrendezések száma

$$\frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_j)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_j!}$$

(vö.: Kóczy T. László: A Pascal-tetraéder, KÖMAL 51. kötet, 1. szám, 1-9. o.). Közben már tovább is fejlesztettük a jelölésünket, amennyiben a $\xi \in H$ eseményt a konkrét egyelemű $H = \{q_i\}$ halmaz mellett a $\xi = q_i$ feltétellel jelöltük. Ezzel a lehetőséggel a továbbiakban is szabadon élünk, nevezetesen $G(a < \xi < b)$ tetszőleges a, b mellett a ξ számcsoporthoz a nyílt (a, b) intervallumba eső tagjainak a számát fogja jelölni.

A $\xi = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ számcsoporthoz eloszlásfüggvénye a minden valós x -re, értelmezett

$$F(x) = \frac{G(\xi < x)}{G(\xi)}$$

függvény. Például $\xi = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ számcsoporthoz néhány gyakorisága: $G(1 < \xi < 6) = 4$, $G(\xi \text{ páros szám}) = 3$, $G(\xi \text{ prímszám}) = 3$, $G(\xi \text{ összetett szám}) = 2$, és eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ \frac{1}{6}[x], & \text{ha } 0 \leq x \leq 6 \\ 1, & \text{ha } x > 6, \end{cases}$$

ahol $[x]$ az x egész része. Emellett a számcsoporthoz az átlaga

$$E(\xi) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3\frac{1}{2},$$

és szórásnégyzete

$$D^2(\xi) = \frac{1}{24}(5^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 + 5^2) = \frac{35}{12},$$

tehát $D(\xi) = \sqrt{\frac{35}{12}} = 1,71$.

Tetszőleges $\xi = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ számcsoporthoz segítségével készíthetünk véletlen számot úgy, hogy egy urnába n cédulát teszünk, és ezekre rendre az $x_1, x_2, \dots, x_n$ számokat írjuk. Aztán kihúzzunk egy cédulát az urnából, megnézzük, és visszatesszük az urnába. Majd jól elkeverjük a számokat, és hasonló módon újra húzzunk annyiszor, ahány számra szükségünk van. Ezzel a módszerrel tetszőleges véletlen számot előállíthatunk, például a kockadobást a $\xi = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ számcsoporthoz generálhatjuk. Generálhatnánk a $\xi = \{1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6\}$ számcsoporthoz is, viszont a $\xi = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6\}$ számcsoporthoz számai előbb-utóbb elárulnák, hogy készítőjük több hatost szeretne kapni, mint amennyi egy közönséges kockán várható volna.

Persze meg is fordíthatjuk a sorrendet, kaphatunk számcsoportot tetszőleges véletlen számból is. Ha az $x_1, x_2, \dots, x_n$ számok egy véletlen szám egymás utáni aktuális értékei, a $\xi = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ számcsoportot a véletlen szám realizációjának nevezzük. Egy realizáció átlagát és szórását tapasztalati átlagnak és tapasztalati szórásnak nevezzük, ezek maguk is véletlen számok, értékük realizációról realizációra változik. A számok számát a realizáció hosszának nevezzük, ennek növekedtével a tapasztalati átlag és tapasztalati szórás ingadozása csökken. Szakkör-sorozatunk fő célja épp e csökkenés vizsgálata.

Tetszőleges véletlen számmal játszható a következő játék. Választunk egy n természetes számot, és a játékosok egymástól függetlenül választanak maguknak egy F felső és egy A alsó számot, ezért fizetnek $(F - A)^2$ pontot. (Ha a véletlen szám értékei nagyok, $\left(\frac{F - A}{K}\right)^2$ pontot, ahol K alkalmasan választott konstans.) Aztán a véletlen szám n hosszúságú ξ realizációja alapján minden játékos $\frac{100}{n}G(A \leq \xi \leq F)$ pontot kap. A végén persze az nyer, akinek a legtöbb pontja van.

A mellékelt 5. feladatban mi a várható pontszámot egy nagyon nagy n mellett fogjuk meghatározni, olyan nagy n mellett, hogy a véletlen már ne is szólhasson abba bele, ki lesz a nyertes. Mert a nyertes az lesz, akinek az általunk számított várható pontszáma a legnagyobb.

Mikor igazságos egy játék?

Ketten játszhatják a következő játékot. A játékosok egy-egy számjegyet írnak egy cédulára, aztán egyszerre felmutatják a számukat. Ha ezek egyformák, az első játékos kap 35 Ft-ot, ha nem, a második kap annyi forintot, amennyi a két szám különbsége (abszolút értékben). Ki fog nyerni ebben a játékban?

Tegyük fel, hogy az első előre megír ezer cédulát. Ezek közül 131-re nullát, 109-re egyet, 95-re kettőt, 85-re hármat, 80-ra négyet, 80-ra ötöt, 85-re hatot, 95-re hetet, 109-re nyolcat és 131-re kilencet ír. A céduláit beleteszi egy urnába, és minden játékban onnan húz ki egyet, aztán vissza is teszi oda. Mit tehet a második, ha tudja, hogy mit csinál az első? Belátható, hogy nem sokat. Hosszú távon mindig az első lesz előnyös helyzetben. Ehhez persze meg kellett találni a mondott számokat, amelyekhez hasonló keresése, reméljük, jó szórakozást nyújt majd az olvasóknak. (Bővebben ezekről Radnainé Szendrei Júlia: A játék matematikája című könyvében olvashatunk.)

Számcsoportok összege

Definíció. Két számcsoport összege az a számcsoport, amelynek tagjait úgy kapjuk, hogy az adott két számcsoport tagjait minden lehetséges módon párba állítjuk, és minden párban vesszük a számok összegét. Tehát a $\xi = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ és $\eta = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ számcsoportok összege a $\zeta = \{x_1 + y_1, x_1 + y_2, \dots, x_1 + y_m, x_2 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_2 + y_m, \dots, x_n + y_1, x_n + y_2, \dots, x_n + y_m\}$ számcsoport, amelynek $n \cdot m$ tagja van.

Tétel. Két számcsoport összegének átlaga egyenlő a számcsoportok átlagának összegével.

Bizonyítás. A definícióban bevezetett jelölések mellett

$$n \cdot m \cdot E(\zeta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i + y_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_j = m \sum_{i=1}^n x_i + n \sum_{j=1}^m y_j = m \cdot nE(\xi) + n \cdot mE(\eta).$$

Tétel. Két számcsoport összegének szórásnégyzete egyenlő a számcsoportok szórásnégyzetének összegével.

Bizonyítás. A definíció jelölései mellett jelöljük $E(\xi)$ -t $\bar{x}$ -sal, $E(\eta)$ -t $\bar{y}$ -sal. Ekkor

$$nmD^2(\xi) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [(x_i - \bar{x}) + (y_j - \bar{y})]^2 = m \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) + n \sum_{j=1}^m (y_j - \bar{y})^2.$$

Itt a középső összeg egyenlő a $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})$ és a $\sum_{j=1}^m (y_j - \bar{y})$ összegek szorzatával, ezek az összegek viszont 0-val egyenlőek.

A mellékelt 6. feladat $\xi = \{-1, 0, 1\}$ számcsoport önmagával képezett többszörös összegével kapcsolatos. Ennek részletes vizsgálata lesz utolsó adásunk témája, ezért kérjük a feladat megoldóit, vizsgálják meg a kapott számokat alaposan, milyen törvényszerűség fedezhető fel bennük.

5. feladat. Milyen határokkal játszható a következő véletlen számokat? (A játékot a cikkben írjuk le.)

