

Az 1976. évi decemberi számunk 232. oldalán jelent meg az 1365. feladat megoldása. *Kriza György* (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.) felhívta figyelmünket a megoldás két hiányosságára.

A megoldásban közölt ábrán rajzolt forgatási iránnyal szemben való forgatásra az eredmény hibás, ugyanis formailag helyes a levezetése, de ilyenkor mindig ellenőrizni kell azt is, hogy a nyomóerők továbbra is nem-negatívak, azaz nem válnak húzóerőkké. Esetünkben, ha az S_2 előjelet vált, N_1 is ellenkező előjelű lenne, azaz ennél a forgásiránynál az $S_2 = 0$, $N_2 = G$, $S_1 = 0$, $N_1 = 0$ erők lépnek fel, a maximális megengedhető – elfordulást még éppen nem okozó – forgatónyomaték $M' = 0$.

Kriza György másik észrevétele az volt, hogy nem vizsgáltuk meg azt a nehezen elképzelhető, matematikai szempontból érdekes esetet, amikor a súrlódási együttható értéke nagyobb, mint 1. Levele alapján az alábbiakban közöljük a feladat ilyen értelemben általános megoldását.

A decemberi számban közölt megoldás szerint a súrlódási erőkre, az erőegyensúlyra és a forgatónyomatékok egyensúlyára a következő egyenlőtlenségeket és egyenleteket írhatjuk fel (az utolsó egyenletet most a súlypontra vonatkoztatjuk):

$$\begin{aligned} (1) \quad & |S_1| \leq \mu_0 N_1, \\ (2) \quad & |S_2| \leq \mu_0 N_2, \\ (3) \quad & S_2 - N_1 = 0, \\ (4) \quad & G - S_1 - N_2 = 0, \\ (5) \quad & S_1 R + S_2 R - M = 0. \end{aligned}$$

A fent említett okok miatt S_2 sohasem lehet negatív, így a (2) egyenlőtlenségben az abszolút érték jelet elhagyhatjuk. Az (1) egyenlőtlenséget $S_1 \geq 0$ esetén

$$(1a) \quad S_1 \leq \mu_0 N_1,$$

illetve $S_1 \leq 0$ esetén

$$(1b) \quad -S_1 \leq \mu_0 N_1$$

alakban írhatjuk. (3) és (4) segítségével az egyenlőtlenségekben kiküszöbölhetjük a nyomóerőket:

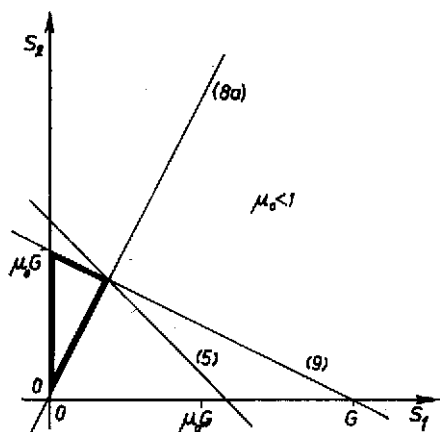
$$\begin{aligned} (6a) \quad & S_1 \leq \mu_0 S_2, \\ (6b) \quad & -S_1 \leq \mu_0 S_2, \\ (7) \quad & S_2 \leq \mu_0 (G - S_1). \end{aligned}$$

A továbbiakban az (1)–(5) rendszer megoldásával foglalkozunk, amelyben ismeretlenek a súrlódási és nyomóerők, valamint az M forgatónyomaték. A maximális forgatónyomatékokat grafikus úton kereshetjük meg úgy, hogy ábrázoljuk

$$\begin{aligned} (8a) \quad & S_1 = \mu_0 S_2, \\ (8b) \quad & -S_1 = \mu_0 S_2, \\ (9) \quad & S_2 = \mu_0 (G - S_1) \end{aligned}$$

az egyeneseket az $(S_1; S_2)$ derékszögű koordináta-rendszerben.

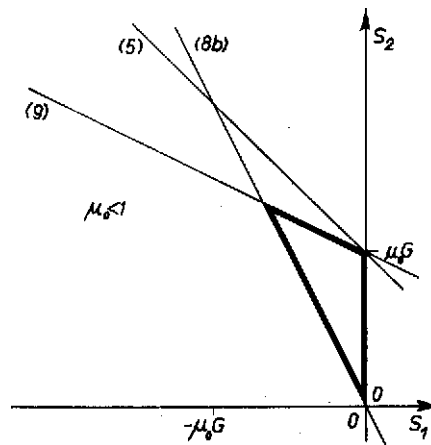
Az 1. ábrán a $\mu_0 < 1$; $S_1 \geq 0$ esetet vizsgáljuk.



1. ábra

A (8a) és (9) egyeneseket ábrázolva könnyen kijelölhetjük a vastag vonallal kiemelt háromszöget, amelynek pontjai és csak ezek a pontok kielégítik a (6a) és (7) egyenlőtlenségeket. A (3) és (4) egyenletből az is látszik, hogy a háromszög pontjaira (a háromszög belsejének és kerületének pontjaira) a nyomóerők nem lehetnek negatívak. A fizikailag megvalósítható maximális forgatónyomaték meghatározásához olyan (5) egyenest kell ábrázolnunk, amelynek még van közös pontja a kiemelt tartománnyal és az M érték a legnagyobb. Mivel az (5) egyenes 45° -os, a (9) egyenes pedig laposabb ($\mu_0 < 1$), az ábrán rajzolt helyzet általánosan is érvényes. Algebrailag meghatározhatjuk a (8a) és (9) egyenesek metszéspontjának koordinátáit, amiből a maximális forgatónyomaték:

$$M_1 = \mu_0 R G \frac{1 + \mu_0}{1 + \mu_0^2} \quad (\mu_0 < 1; S_1 \geq 0).$$

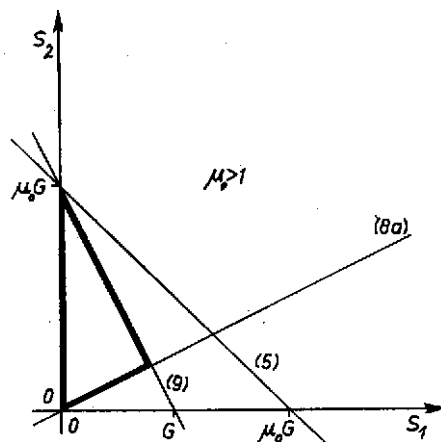


2. ábra

A 2. ábrán azt az esetet vizsgáljuk, amikor $\mu_0 < 1$; $S_1 \leq 0$. A (8b) és (9) egyenesek által kijelölt háromszög pontjai kielégítik a (6b) és (7) egyenlőtlenségeket, valamint a nyomóerők sem lehetnek negatívak. A berajzolt (5) egyenes pedig a maximális forgatónyomatékot határozza meg:

$$M_2 = \mu_0 R G \quad (\mu_0 < 1; S_1 \leq 0).$$

azaz ($M_1 > M_2$) a valóságos maximum az eredeti megoldásban is megadott M_1 érték.

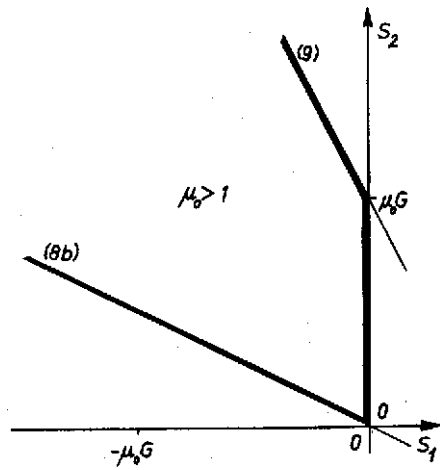


3. ábra

A 3. ábrán a $\mu_0 > 1$; $S_1 \geq 0$ esetnek megfelelő (8a) és (9) egyeneseket ábrázoltuk. A megvastagított kerületű háromszög pontjai kielégítik a megfelelő egyenlőtlenségeket, valamint a nyomóerők sem lehetnek negatívak. A maximális forgatónyomaték a berajzolt (5) egyenes alapján:

$$M_3 = \mu_0 R G \quad (\mu_0 > 1; S_1 \geq 0).$$

A 4. ábrán a $\mu_0 > 1$; $S_1 \leq 0$ esetet vizsgáljuk.



4. ábra

A megkívánt feltételeknek itt a (8b), a (9) egyenesek és az $S_1 = 0$ koordinátatengely által határolt végtelen tartomány pontjai felelnek meg. Mivel az (5) egyenes laposabb, mint a (9), tetszőlegesen nagy M mellett is áthalad az (5) egyenes a kijelölt tartományon – bármilyen nagy forgatónyomatékot is alkalmazunk, a kerék nem fordul el. A kerék ilyen körülmények között beszorulna a szögletbe:

$$M_4 = \infty \quad (\mu_0 > 1; S_1 \leq 0),$$

és nyilvánvalóan $\mu_0 > 1$ -re ez lesz a maximális forgatónyomaték.

Az eddigi vizsgálatokból kizártuk a $\mu_0 = 1$ esetet. Valamennyi vizsgált lehetőségénél az (5) és a (9) egyenesek egybeesnek, a maximális forgatónyomaték

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = RG \quad (\mu_0 = 1)$$

lenne. Az egyenesek egybeesése azt jelenti, hogy a feladat még határesetben is határozatlan lenne, a súrlódási és nyomóerőket nem határoznák meg a merev test egyenletei.

Az ellenkező irányú forgatásnak olyan (5) egyenes felelne meg, amelyben M negatív, azaz olyan 45° -os egyeneseket kell keresnünk, melyek alulról érintik a megengedett tartományokat. Látható, hogy mind a négy esetben ez az egyenes az origón halad át, vagyis a legkisebb ellenkező előjelű forgatónyomaték is azonnal „kigurítja” a sarokból a kereket.