

1. Számoljuk ki $\operatorname{tg} 11,25^\circ$, $\cos 3^\circ$ pontos értékét! 2. A k kör AB átmérőjének egy kijelölt pontja P . Szerkesszük meg azt a P -n áthaladó CD húrt, amelyre az $ACBD$ húrnégyszög területe maximális

3. Legyen k az ABC háromszög körülírt köre. Tekintsük azt a maximális átmérőjű kört, amely érinti a BC oldalt és az A -t nem tartalmazó BC ívet, legyen ennek átmérője d_A . Hasonlóan definiáljuk d_B -t és d_C -t. Bizonyítsuk be, hogy ha k sugara r , akkor

$$\frac{3}{2} \leq d_A + d_B + d_C < 2r.$$

4. Az AB átmérőjű O középpontú félkörön fut a P pont. P vetülete az AB szakaszon Q , az AB ív felezőpontja C . QC és OP egyenes R -ben metszi egymást. Mi R mértani helye, ha P befutja a félkört?

5. Az e egyenesen adott három pont, A , B és F (B van középen). A -ban és B -ben merőlegest állítunk e -re, kapjuk az a és b egyenest. Az F -en átmenő tetszőleges f egyenes a -t A_1 -ben, b -t B_1 -ben metszi. Az A_1B_1 átmérőjű K kör második metszéspontja a -val, ill. b -vel A_2 , ill. B_2 . Az A_2B_1 , A_1B_2 , egyeneseket érintő, K -val koncentrikus kör k . Az AB szakasz C felezőpontjából k -hoz húzott érintők k -t E_1 és E_2 -ben érintik. Az E_1E_2 egyenes f -et P -ben, a K kört az M és N pontokban metszi. Mi P , M és N mértani helye, ha f körbe fordul F körül?

6. Az ABC háromszög körülírt körének középpontja K , beírt körének középpontja O . Tudjuk, hogy AB , AC , BC hosszai (ilyen sorrendben) számtani sorozatot alkotnak. Mekkora a BOK szög?

7. Szerkesszük meg a négyszöget, ha ismerjük a szögeit és átlóinak hosszát.

8. Adott egy pontból induló négy félegyenes és két szakasz, a , b . Szerkesztendő olyan paralelogramma, amelynek négy csúcsa rendre a négy félegyenesre esik és két oldala a , ill. b hosszúságú.

9. Szerkesszünk téglalapot, ha ismerjük az átló hosszát és adott oldalainak egy-egy pontja.

10. Adott az e egyenesen négy pont, A , B , C , D . Szerkesszünk $P_1P_2P_3P_4P_5$ szabályos ötszöget, amelynek P_1P_2 oldalegyenesére illeszkedik A , P_2P_3 oldalegyenesére B , P_4P_5 oldalegyenesére C és a P_1P_3 átló egyenesére D .

11. Ha a , b , c egy háromszög oldalai, m_a , f_a , s_a az a oldalhoz tartozó magasság, szögfelező és súlyvonal hossza, akkor

$$\frac{(b+c)^2}{4bc} \leq \frac{s_a}{f_a} \quad \text{és} \quad \frac{b^2+c^2}{4bc} \leq \frac{s_a}{m_a}.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

Igaz-e, hogy a háromszög súlyvonalaiból mint oldalakból szerkesztett háromszög beírt körének ϱ sugarára

$$\varrho \leq \frac{3abc}{4(a^2+b^2+c^2)}.$$

Az egyenlőség pontosan akkor van, ha $a = b = c$?

12. Az ABC háromszög BC oldalán fut a P pont. AP egyenes és ABC körülírt körének második metszéspontja Q . Igaz-e, hogy egyetlen olyan P pont van, amelyre a PQ szakasz maximális, és ez a P pont a BC oldal F felezőpontja és az A -ból induló szögfelező T talppontja közé esik?

13. Igaz-e, hogy ha p a háromszög félkerülete, m_a az a oldalhoz tartozó magasság, f_b a b oldalhoz tartozó szögfelező és s_c a c oldalhoz tartozó súlyvonal, akkor

$$m_a + f_b + s_c \leq \sqrt{3}p.$$

14. Adott 17 pont az r sugarú körben. Igazoljuk, hogy van köztük kettő, amelynek távolsága kisebb $\frac{2}{3}r$ -nél.

15. Az $ax^3 + bx^2 + cx + d$ harmadfokú, komplex együtthatós polinom három nullhelye a Gauss-féle számsíkon a z_1 , z_2 , z_3 pont. A polinom deriváltjának két nullhelye az ω_1 és ω_2 pont. Van-e olyan ω_1 és ω_2 fókuszú ellipszis, ami érinti a $z_1z_2z_3$ háromszög oldalait?