1. a. Ábrázoljuk a két oldalt. Megoldás: $-\pi/2 + 2k\pi \le x \le \pi/2 + 2k\pi$.

b. Ábrázoljuk a két oldalt. Megoldás: $x \ge 1$.

c. $\sin x \ne 0$, vagyis $x \ne k\pi$. Mivel a $\sin x$ páratlan függvény, ezért a megoldás: $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi\}$, ahol $k \in \mathbf{N}$.

2. $\sin 74^\circ + \sin 16^\circ = 2\sin 45^\circ \cos 29^\circ = \sqrt{2}\sin 61^\circ$,
$\sin 62^\circ + \sin 28^\circ = 2\sin 45^\circ \cos 17^\circ = \sqrt{2}\sin 73^\circ$.

3. A C és a k ismeretében felírható a C-vel szemközti oldal egyenlete: $x - 2y - 9 = 0$. Ezek alapján az x tengelyen lévő csúcs: $A(9;0)$. Használjuk fel a súlypont koordinátáit is, $B(-3;-6)$.

4. A befogótétel szerint: $a^2 = pc$, $b^2 = qc$, így $a^2b^2 = pqc^2$, amiből

$$\frac{1}{pq} = \frac{c^2}{a^2b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

5. Ismert, hogy a hasonló síkidomok területei a megfelelő oldalak négyzeteivel arányosak, ezért létezik olyan pozitív k, amire $t_a = ka^2$, $t_b = kb^2$, $t_c = kc^2$. A koszinusztétel szerint:

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos\alpha.$$

k-val szorozva a bizonyítandó állítást kapjuk.

6. $x^5 + y^5 = (x+y)\{(x+y)^4 - 5xy[(x+y)^2 - xy]\}$. Legyen $xy = a$, ekkor $2 = 1 - 5a(1-a)$, Innen:

$$a_1 = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}, \quad a_2 = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}.$$

Az

$$\left.\begin{aligned} x+y &= 1 \\ xy &= a \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert oldjuk meg. a_1-re nincs valós megoldás. a_2-re:

$$x_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{-5+6\sqrt{5}}{20}} (\approx 1,149), \quad x_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{-5+6\sqrt{5}}{20}},$$
$$y_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{-5+6\sqrt{5}}{20}} (\approx -0,149), \quad y_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{-5+6\sqrt{5}}{20}}.$$

7. A víz térfogatát egy csonkakúp térfogata adja (a csonkakúp magassága $m' = m/2$)

$$V = \frac{\pi}{3}m'\left(r^2 + \frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{2}\right) = \frac{7}{12}r^2\pi m' = \frac{7}{24}r^2\pi m. \tag{1}$$

A csúcsán álló kúpnál a térfogat egy kúp térfogata lesz, sugara legyen r_1, magassága x. $r/m = r_1/x$, amiből $r_1 = rx/m$, így

$$V = r_1^2\pi x = \frac{r^2\pi x^3}{m^2}. \tag{2}$$

(1) és (2) alapján $x = m\sqrt[3]{7/24} \approx m \cdot 0,663$.

8. $S_n = \dfrac{n}{2}[2a + (n-1)d]$; $S_{2n} - S_n = \dfrac{n}{2}[2a + (3n-1)d]$.

Tudjuk, hogy minden n-re: $\dfrac{2a+nd-d}{2a+3nd-d} = K$.

Alakítva: $nd(1-3K) = (2a-d)(K-1)$. A feltételek alapján $K \ne 1$, $d \ne 0$, ezért az egyenlőség csak akkor állhat fenn minden n-re, ha $K = 1/3$, $2a = d$ teljesül. Vagyis a keresett hányados $1/3$.