

1. a. Ábrázoljuk a két oldalt. Megoldás: $-\pi/2 + 2k\pi \leq x \leq \pi/2 + 2k\pi$.

b. Ábrázoljuk a két oldalt. Megoldás: $x \geq 1$.

c. $\sin x \neq 0$, vagyis $x \neq k\pi$. Mivel a $\sin x$ páratlan függvény, ezért a megoldás: $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi\}$, ahol $k \in \mathbf{N}$.

2. $\sin 74^\circ + \sin 16^\circ = 2 \sin 45^\circ \cos 29^\circ = \sqrt{2} \sin 61^\circ$,

$\sin 62^\circ + \sin 28^\circ = 2 \sin 45^\circ \cos 17^\circ = \sqrt{2} \sin 73^\circ$.

3. A C és a k ismeretében felírható a C -vel szemközti oldal egyenlete: $x - 2y - 9 = 0$. Ezek alapján az x tengelyen lévő csúcs: $A(9; 0)$. Használjuk fel a súlypont koordinátáit is, $B(-3; -6)$.

4. A befogótétel szerint: $a^2 = pc$, $b^2 = qc$, így $a^2b^2 = pqc^2$, amiből

$$\frac{1}{pq} = \frac{c^2}{a^2b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

5. Ismert, hogy a hasonló síkidomok területei a megfelelő oldalak négyzeteivel arányosak, ezért létezik olyan pozitív k , amire $t_a = ka^2$, $t_b = kb^2$, $t_c = kc^2$. A koszinusztétel szerint:

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos \alpha.$$

k -val szorozva a bizonyítandó állítást kapjuk.

6. $x^5 + y^5 = (x + y)\{(x + y)^4 - 5xy[(x + y)^2 - xy]\}$. Legyen $xy = a$, ekkor $2 = 1 - 5a(1 - a)$, Innen:

$$a_1 = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}, \quad a_2 = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}.$$

Az

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ xy = a \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert oldjuk meg. a_1 -re nincs valós megoldás. a_2 -re:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{-5 + 6\sqrt{5}}{20}} (\approx 1, 149), & x_2 &= \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{-5 + 6\sqrt{5}}{20}}, \\ y_1 &= \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{-5 + 6\sqrt{5}}{20}} (\approx -0, 149), & y_2 &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{-5 + 6\sqrt{5}}{20}}. \end{aligned}$$

7. A víz térfogatát egy csonkakúp térfogata adja (a csonkakúp magassága $m' = m/2$)

$$(1) \quad V = \frac{\pi}{3} m' \left(r^2 + \frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{2} \right) = \frac{7}{12} r^2 \pi m' = \frac{7}{24} r^2 \pi m.$$

A csúcán álló kúpnál a térfogat egy kúp térfogata lesz, sugara legyen r_1 , magassága x . $r/m = r_1/x$, amiből $r_1 = rx/m$, így

$$(2) \quad V = r_1^2 \pi x = \frac{r^2 \pi x^3}{m^2}.$$

(1) és (2) alapján $x = m \sqrt[3]{7/24} \approx m \cdot 0,663$.

8. $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$; $S_{2n} - S_n = \frac{n}{2}[2a + (3n-1)d]$.

Tudjuk, hogy minden n -re: $\frac{2a + nd - d}{2a + 3nd - d} = K$.

Alakítva: $nd(1 - 3K) = (2a - d)(K - 1)$. A feltételek alapján $K \neq 1$, $d \neq 0$, ezért az egyenlőség csak akkor állhat fenn minden n -re, ha $K = 1/3$, $2a = d$ teljesül. Vagyis a keresett hányados $1/3$.