

1. Szerkesszünk adott n -szögbe olyan minimális kerületű n -szöget, amelynek csúcsai rendre az adott n -szög oldal-egyeneseire esnek. (Az oldalegyenesek sorrendje azonos a csúcsokéval.) Bizonyítsuk be, hogy ha $n = 4$ és az adott négyszög húrnégyszög, akkor kerületének bármely pontja lehet ilyen minimális kerületű, négy csúcsával a négy oldal-egyenestre illeszkedő négyszög csúcspontja. Jellemzi-e ez a tulajdonság a húrnégyszögeket?

2. Bizonyítsuk be, hogy ha a , b , c egy háromszög oldalai, f_a , f_b , f_c a hozzá tartozó szögfelezők hossza, akkor

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{f_a} + \frac{1}{f_b} + \frac{1}{f_c} \right).$$

Mikor áll fenn egyenlőtlenség? Igaz-e az állítás szögfelezők helyett súlyvonalakra is?

3. Bizonyítsuk be, hogy ha a , b , c a háromszög oldalai, s_a , s_b , s_c a megfelelő oldalhoz tartozó súlyvonalak hossza, akkor

$$3[a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c)] \leq 9abc \leq 4as_a^2 + 4bs_b^2 + 4cs_c^2.$$

Mikor áll fenn egyenlőtlenség?

4. Az AB szakasznak ugyanazon a partján két körív van adva. A külső körívén végigfut egy P pont. P melyik helyzetében lesz minimális a PA és PB egyenes által a belső körívből levágott két körszelet együttes területe?

5. Adott négy pont a síkon, bármely három által meghatározott háromszög területe legfőljebb egységnyi. Igazoljuk, hogy a négy háromszög beírt köre közül a legkisebbnek legfőljebb $\sqrt{2} - 1$ a sugara. Mikor lehet egyenlőség? Igaz-e ugyanez, ha azt követeljük meg, hogy a négy pont közül bármely kettő távolsága legfőljebb kettő legyen?

6. A k kör AB átmérőjének egy P pontjában merőlegest állítunk AB -re. A merőleges egy S pontját összekötjük az átmérő közelebbi végpontjával, B -vel. BS a k kört Z -ben metszi másodszor, ZP pedig Q -ban. Melyik a nagyobb a QP és a BS szakaszok közül?

7. Az ABC háromszög AB oldalához írt kör érintse az AB oldalt D -ben, az AC oldalegyenest E -ben. Az AC oldalhoz írt kör érintse az AC oldalt F -ben. BF és CD egyenesek N metszéspontján keresztül húzzunk párhuzamost AC -vel, az A csúcson keresztül pedig BF -fel. Bizonyítsuk be, hogy ez a két egyenes a DE egyenesen metszi egymást.

8. Az ABC háromszög beírt köre az AB , AC , BC oldalakat rendre a D , E , F pontokban érinti. EF az AB egyenest P -ben metszi. P -ből a körhöz húzott másik érintő D' -ben érinti a kört. Igazoljuk, hogy D , D' , C kollineáris. (Feltesszük, hogy $AC \neq BC$.)

9. Igazoljuk, hogy az előző feladat jelöléseit alkalmazva, AF és BE egyenes G metszéspontjának a három oldaltól vett x , y , z távolságára

$$x : y : z = \frac{1}{1 + \cos \alpha} : \frac{1}{1 + \cos \beta} : \frac{1}{1 + \cos \gamma},$$

ahol α , β , γ a háromszög szögei.

10. Az előző két feladat jelöléseit alkalmazva, adott az ABC háromszög beírt köre, a D érintési pont és az AF , BE egyenesek G metszéspontja. Szerkesszük meg a háromszöget.

11. Adott a síkon három, közös pontból induló félegyenes, a , b , c és adott három pont, P , Q , R . Szerkesszük meg azt a háromszöget, amelynek három oldala a három adott pontra, a három csúcsa a három adott félegyenesre illeszkedik.

12. Az ABC háromszög köré írt kör B és C pontbeli érintője a P pontban találkozik. Igaz-e, hogy ha a PA egyenest tükrözzük a BAC szög felezőjére, a kapott egyenes átmegy az ABC háromszög súlypontján?

13. Húzzunk párhuzamost a parabola tengelyével két érintőjének, e -nek és f -nek A metszéspontjából. Legyen ez a párhuzamos g , a parabola fókusza F . Bizonyítsuk be, hogy FA és f szöge egyenlő e és g szögével.

14. Az egymásra merőleges OX és OY egyenesen fut az A , ill. a B pont úgy, hogy $OA + OB$ állandó. Az O -n átmenő, AB -vel párhuzamos egyenes az ABO háromszög köré írt kört másodszor az M pontban metszi. Mi az M pont mértani helye? Milyen alakzatot burkol az AB szakasz mozgás közben?

15. Malfatti olasz matematikustól származik a következő feladat: Adott ABC háromszögben szerkesszünk egymást érintő k_1 , k_2 , k_3 köröket úgy, hogy k_1 érinti az AB , AC oldalakat, k_2 érinti az AB , BC oldalakat és k_3 érinti az AC , BC oldalakat. Steiner német matematikus Malfatti feladatára a következő megoldást adta:

1984-12-460-1.eps

„Legyen O az ABC beírt körének középpontja, l_1 , l_2 , l_3 legyen a BOC , COA , AOB háromszög beírt köre. Húzzuk meg e három kör közül bármely kettőnek a másik belső közös érintőjét, messék ezek az oldalakat rendre az S , S' , T , T' , U , U' pontokban (l. az ábrát). Az ATT' , BUU' , CSS' háromszögek beírt köre megfelel k_1 , k_2 , k_3 körnek.”

Helyes-e Steiner megoldása?