

Az első forduló feladatai

I. kategória

Bizonyítsa be, hogy a

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(a + d)^2 + (b + c)^2}$$

egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $ac = bd$.

2. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\frac{4 \sin x + 3}{4 \cos x + 3} = \frac{3 \cos x + 4}{3 \sin x + 4}.$$

3. Oldjuk meg a következő egyenletet a pozitív számok körében:

$$x + \frac{1}{x} = -y^2 + 6y - 7.$$

4. Az ABC háromszög α szögének szögfelezője az A_1 pontban metszi a szemközti oldalt. Bizonyítsuk be, hogy $(AA_1)^2 = AB \cdot AC - A_1B \cdot A_1C$.

5. Melyek azok az n pozitív egész számok, amelyekre $n - 1990$ és $n + 1990$ teljes négyzetek?

6. Egy rombusz oldalának hossza 6 egység, egyik szöge 30° . Rajzoljunk a rombusz minden oldala fölé kifelé négyzetet. Mekkora lesz a négyzetek középpontjai által meghatározott négyszög területe?

II. kategória

1. Hány olyan ötjegyű szám van, amelyben minden előforduló számjegy legalább kétszer szerepel?

2. Egy ABC hegyesszögű háromszög C csúcsa egyenlő távol van a magasságponttól és a háromszög köré írt kör középpontjától. Mekkora az ACB szög?

3. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget:

$$(2 \sin x + 1)(\tan x - 1) \leq 2; \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

4. Legyen δ az a szög, amelyet egy derékszögű háromszögben az egyik befogóhoz tartozó súlyvonal és az átfogó zárnak be. Bizonyítsuk be, hogy $\sin \delta \leq \frac{1}{3}$.

5. Az (a_n) sorozatot a következő módon definiáljuk:

$$a_1 = k \quad (\text{pozitív egész}),$$
$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{ha } a_n \text{ páros,} \\ a_n + 5, & \text{ha } a_n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Mely k pozitív egészekre igaz, hogy 1 előfordul az (a_n) sorozat tagjai között?

III. kategória

1. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sin^3 \frac{\alpha}{3} + 3 \sin^3 \frac{\alpha}{3^2} + \dots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{\alpha}{3^n} = \frac{1}{4} \left(3^n \sin \frac{\alpha}{3^n} - \sin \alpha \right).$$

2. Van-e az $x^2 + xy + y^2 = 2$ egyenletnek racionális számokból álló megoldása?

3. Legyen δ az a szög, amelyet egy derékszögű háromszögben az egyik befogóhoz tartozó súlyvonal és az átfogó zárnak be. Bizonyítsuk be, hogy $\sin \delta \leq 1/3$.

4. Antal 100 gyufásdobozt megszámoz 1-től 100-ig, és mindegyikbe tetszés szerinti számú gyufát tesz. Bea tetszőlegesen kiválaszt 15 dobozt, erre Antal megszámozja a bennük lévő gyufákat (úgy, hogy Bea ezt ne lássa), és megmondja, hogy a 15 dobozban együttesen páros vagy páratlan számú gyufa van. Bea ezt a kérdezési lépést akárhányszor megismételheti. Ki tudja-e Bea találni, hogy az 1-es számú dobozban páros vagy páratlan sok gyufa van, és ha igen, akkor mi az ehhez szükséges minimális lépésszám?

5. Legyen

$$a_0 = 1 \quad \text{és} \quad a_n = \frac{\sqrt{1 + a_{n-1}^2} - 1}{a_{n-1}}; \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$a_n > \frac{\pi}{2^{n+2}}.$$

A második (döntő) forduló feladatai

I. kategória

(Szakközépiskolák tanulói számára)

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$xy + xz = 8 - x^2;$$

$$xy + yz = 12 - y^2;$$

$$yz + zx = -4 - z^2.$$

2. Jelölje d az ABC hegyesszögű háromszög A csúcsán átmenő egyenest. Legyen a B , illetve a C csúcs vetülete a d egyenesen B' , illetve C' . A d egyenes mely helyzetében lesz a $BB' + CC'$ összeg maximális?

3. Bizonyítsuk be, hogy ha az a , b , c oldalú háromszög kerülete 2 egység, akkor

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2.$$

II. kategória

(A gimnáziumok III., IV. osztályos tanulói számára,
kivéve a speciális matematika tanterv szerint tanulókat)

1. Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egész számhoz található olyan k pozitív egész, hogy az

$$S(n, k) = n + (n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + k - 1)$$

összeg négyzetszám.

2. Adott a síkon a T területű $A_1A_2 \dots A_n$ sokszög, a P pont és az α szög, melyre $0 < \alpha \leq 180^\circ$. Jelölje a P pontnak az A_i körüli pozitív α szögű elforgatottját P_i . Mekkora a $P_1P_2 \dots P_n$ sokszög területe?

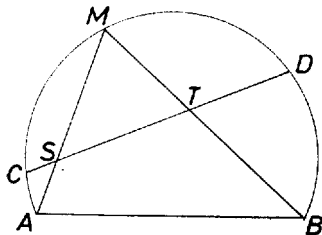
3. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan pozitív egész m kitevő, melyre $2^{1990} | 1989^m - 1$, (azaz $1989^m - 1$ osztható 2^{1990} -nel). Adjuk meg a legkisebb ilyen pozitív egész kitevőt.

III. kategória

(A gimnáziumok speciális matematika tanterv szerint tanuló diákjai számára)

1. Bergengóciában minden ember (egymásra való tekintet nélkül) p valószínűséggel ($0 < p < 1$) hazudik, csak két kivételt van: az Elnök és a Rádióriporter, akik történetesen megbízhatóak. Az Elnök elhatározza, hogy ismét indul a választásokon, és ezt közli az első emberrel, aki továbbadja a hírt a következő embernek, ..., végül az n -edik ember elmondja a hírt a Rádióriporternek. (Az n ember között nem szerepel az Elnök, sem a Rádióriporter.) $n = 19$ vagy $n = 20$ esetén valószínűbb, hogy a Rádióriporter a valódi döntést közvetíti?

2. Az AB húrhoz az ábra szerint egy körívet rajzolunk.



A körív két rögzített pontja C és D . Az M pont a körív CD ívén mozog. Az MA és MB szakaszoknak a CD -vel való metszéspontjai S és T . Adj szerkesztési eljárást annak az M pontnak a meghatározására, amely esetében az ST szakasz a lehető leghosszabb.

3. Négyzetország úthálózata 100 „vízszintes” és 100 „függőleges” egyenesből álló négyzetrács. A 10 000 rácspontot, amelyek az ország városai, valahogyan megszámozzuk 1-től 10 000-ig. A rács egy kis négyzetének oldalhossza egy szupermérföld. Valaki 10 000 nap alatt beutazza az országot a következőképpen. Az első napon elindul az 1-es városból és a legrövidebb („vízszintes” és „függőleges”) úton eljut a 2-esbe. A második napon ugyanúgy elautózik a 2-esből a hármasba stb. Végül a 10 000-ik napon visszatér a 10 000-esből az 1-esbe. Maximálisan hány szupermérföldet tehetett meg, ha a városok minden lehetséges megszámozását figyelembe vesszük?