

1. (2)-ben $\gamma = \sqrt{2}$ -vel $\alpha = \frac{3}{2} + \sqrt{2} (< 3)$ is megfelelő, ez (3)-hoz hasonlóan igazolható.

Felvetődik a kérdés, hogy (2)-ben α meddig csökkenthető. Könnyen látható, hogy ha valamilyen α -hoz létezik a (2)-t kielégítő γ , akkor olyan γ is létezik, amely a $[0; 1]$ intervallumba esik (γ ugyanis pontosan akkor megfelelő α -hoz, ha $\{\gamma\}$ is az).

Az is látszik, hogy a rögzített $q (> 0)$ nevező esetén (2)-nek elegendő teljesülnie arra a $\frac{p}{q}$ törtre, amelyek a lehető legjobban megközelíti a γ -t.

Feltehetjük, hogy $0 \leq \gamma < 1$, azaz $\frac{0}{q} \leq \gamma < \frac{q}{q}$, vagyis $\frac{p}{q}$ -ről feltehető, hogy a $[0; 1]$ intervallumba esik.

Ezek szerint pontosan azokhoz az α -khoz létezik „jó” γ , amelyekre a

$$\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{\alpha q^2}; \frac{p}{q} + \frac{1}{\alpha q^2} \right)$$

alakú nyílt intervallumok $0 \leq p \leq q$, $0 < q$, p és q egészek) nem fedik be a $[0; 1]$ -et. (Természetesen itt a $[0; 1]$ intervallum helyett $[0; 1]$ -et is írhatunk, mert az $\left(1 - \frac{1}{\alpha}; 1 + \frac{1}{\alpha} \right)$ fedőintervallum tartalmazza az 1-et.)

A kérdés tehát az, hogy milyen kicsi lehet az α , ha

$$(5a) \quad [0; 1] \not\subset \bigcup_{\substack{p, q \in \mathbf{N} \\ 0 \leq p \leq q \neq 0}} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{\alpha q^2}; \frac{p}{q} + \frac{1}{\alpha q^2} \right),$$

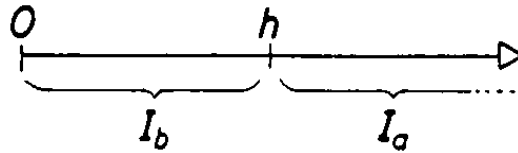
illetve kontraponálva, milyen nagy lehet az α , ha

$$(5b) \quad [0; 1] \subset \bigcup_{\substack{p, q \in \mathbf{N} \\ 0 \leq p \leq q \neq 0}} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{\alpha q^2}; \frac{p}{q} + \frac{1}{\alpha q^2} \right).$$

Az (5a)-t, ill. az (5b)-t kielégítő (pozitív) α -k egy-egy I_a , ill. I_b intervallumot alkotnak úgy, hogy $I_a \cap I_b = \emptyset$, $I_a \cup I_b = (0, +\infty)$ és

$$\sup I_b = \inf I_a = h.$$

Nyilván $(0; h) \subset I_b$, $(h; +\infty) \subset I_a$.



Egyszerűen adódik, hogy $2,5 \leq h$, azaz $2,5 \in I_b$. Ehhez azt kell csak megmutatnunk, hogy $\alpha = 2,5$ esetén (5b) teljesül, amit pedig igazol a

$$\begin{aligned} [0; 1] &= [0; 0,4) \cup \{0,4\} \cup (0,4; 0,6) \cup \{0,6\} \cup (0,6; 1] \subset \\ &\subset \left(-\frac{1}{2,5}; \frac{1}{2,5} \right) \cup \left(\frac{4}{10} - \frac{1}{2,5 \cdot 10^2}; \frac{4}{10} + \frac{1}{2,5 \cdot 10^2} \right) \cup \\ &\cup \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2,5 \cdot 2^2}; \frac{1}{2} + \frac{1}{2,5 \cdot 2^2} \right) \cup \left(\frac{6}{10} - \frac{1}{2,5 \cdot 10^2}; \frac{6}{10} + \frac{1}{2,5 \cdot 10^2} \right) \cup \\ &\cup \left(1 - \frac{1}{2,5}; 1 + \frac{1}{2,5} \right) \subset \bigcup_{\substack{p, q \in \mathbf{N} \\ 0 \leq p \leq q \neq 0}} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{2,5 q^2}; \frac{p}{q} + \frac{1}{2,5 q^2} \right) \end{aligned}$$

reláció.

Ezek szerint (2)-ben $\alpha < 2,5$ már nem lehetséges

Most példát adok $\alpha = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2,618$ -ra. Legyen $\gamma = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$; azt fogjuk belátni, hogy

$$(6) \quad \left| \frac{\sqrt{5} - 1}{2} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{\alpha q^2},$$

azaz

$$\left| \gamma - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{aq^2}.$$

Mivel $0 < \gamma < 1$, ezért az előzőek alapján (6)-ban feltehetjük, hogy $0 \leq \frac{p}{q} \leq 1$.

Jelölje $\bar{\gamma}$ a γ algebrai konjugáltját: $\bar{\gamma} = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$. Ekkor γ és $\bar{\gamma}$ az

$$x^2 + x - 1 = 0$$

egyenlet gyökei, és ezért tetszőleges x számra

$$x^2 + x - 1 = (x - \gamma) \cdot (x - \bar{\gamma}).$$

Emiatt

$$\left| \frac{p}{q} - \gamma \right| \cdot \left| \frac{p}{q} - \bar{\gamma} \right| = \left| \left(\frac{p}{q} \right)^2 + \left(\frac{p}{q} \right) - 1 \right| = \frac{|p^2 + pq - q^2|}{q^2}.$$

A bal oldalon $0 \leq \frac{p}{q} \leq 1$ alapján

$$(0 <) \left| \frac{p}{q} - \bar{\gamma} \right| = \left| \frac{p}{q} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right| = \frac{p}{q} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \leq 1 + \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{\sqrt{5}+3}{2} = \alpha,$$

a jobb oldalon pedig $|p^2 + pq - q^2| \geq 1$, hiszen $|p^2 + pq - q^2| = 0$ esetén a bal oldal egyik tényezője eltűnne, ami lehetetlen, mert γ és $\bar{\gamma}$ irracionálisak. Így

$$\alpha \cdot \left| \frac{p}{q} - \gamma \right| \geq \frac{1}{q^2},$$

azaz

$$\left| \gamma - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{\alpha q^2},$$

amit bizonyítani akartunk.

Levezetésünkéből az is kiderül, hogy (6)-ban pontosan akkor érvényes az egyenlőség, ha $p = 1$ és $q = 1$.

A (2)-t kielégítő α -k alsó határa $-h$ - tehát a $[2, 5; \frac{\sqrt{5}+3}{2}]$ intervallumba esik.

2. Előző megjegyzésünk szerint tudunk olyan (x_k) sorozatot készíteni, amelyre a $\beta = \frac{\sqrt{5}+3}{4} \approx 1,309$ korláttal

$$(7) \quad |x_k| < \beta, \quad \text{és} \quad |x_i - x_j| \cdot |i - j| \geq 1$$

teljesül. Itt is jó kérdés az, hogy milyen kicsi lehet a β .

Megmutatjuk, hogy $1 < \beta$; azaz $\beta \leq 1$ már nem lehetséges.

Legyen (x_k) egy, a (7)-et kielégítő sorozat, és tegyük fel, hogy az $i_0, i_1, \dots, i_n \in \mathbf{N}$ indexekre

$$(-\beta <) x_{i_0} < x_{i_1} < \dots < x_{i_n} (< \beta).$$

Ekkor (7) szerint

$$2\beta > x_{i_n} - x_{i_0} = \sum_{s=1}^n (x_{i_s} - x_{i_{s-1}}) \geq \sum_{s=1}^n \frac{1}{|i_s - i_{s-1}|},$$

tehát

$$(8) \quad \frac{1}{|i_n - i_{n-1}|} + \frac{1}{|i_{n-1} - i_{n-2}|} + \dots + \frac{1}{|i_1 - i_0|} < 2\beta.$$

Ha most x_0, x_1, x_2, x_3 és x_4 lehetséges nagyságbeli sorrendjeit vizsgáljuk, akkor – nem túlságosan nehéz ellenőrizni

a) vagy van három olyan $0 \leq i_0, i_1, i_2 \leq 4$ index, hogy $x_{i_0} < x_{i_1} < x_{i_2}$, és

$|i_1 - i_0| = 1, |i_2 - i_1| = 1$, tehát (8) alapján $2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} < 2\beta$, vagy pedig

b) van 4 olyan $0 \leq i_0, i_1, i_2, i_3 \leq 4$ index, hogy $x_{i_0} < x_{i_1} < x_{i_2} < x_{i_3}$, és

$|i_1 - i_0| = 2, |i_2 - i_1| = 1, |i_3 - i_2| = 2$, vagyis (8) alapján $2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} < 2\beta$.

Mindenképpen teljesül tehát a $2 < 2\beta$, $1 < \beta$ egyenlőtlenség.

Ezek szerint a (7)-ben lehetséges β -k alsó határa az $\left[1; \frac{\sqrt{5}+3}{4}\right]$ intervallumban van valahol.

3. Láttuk, hogy $a \geq 1$ esetén létezik olyan korlátos (x_k) sorozat ($|x_k| < \beta$), amelyre

$$(9) \quad |x_i - x_j| \cdot |i - j|^a \geq 1$$

teljesül minden $i \neq j$ természetes számpár esetén. Megmutatjuk, hogy $a < 1$ esetén ilyen sorozat *nem létezik*.

Tegyük fel ugyanis, hogy állításunkkal ellentétben az (x_k) sorozatra $|x_k| < \beta$ és (9) teljesül. A sorozat korlátos volta miatt vannak egymáshoz tetszőlegesen közel lévő elemek, tehát van olyan $i \neq j$ természetes számpár, amelyre $|x_i - x_j| < 1$ teljesül, és ekkor (9)-ből $|i - j|^a > 1$, vagyis $a \leq 0$ semmiképpen nem lehetséges. A továbbiakban legyen tehát $0 < a < 1$. Tekintsük az $x_0, x_1, \dots, x_n$ elemek nagyságbeli sorrendjét:

$$x_{i_0} < x_{i_1} < \dots < x_{i_n},$$

ahol $(i_0, i_1, \dots, i_n)$ a $(0, 1, \dots, n)$ elemek egy permutációja. Ekkor (8)-hoz hasonlóan (9)-ből

$$(10) \quad \sum_{s=1}^n |i_s - i_{s-1}|^{-a} < 2\beta.$$

Mivel $0 \leq i_s, i_{s-1} \leq n$, ezért $1 \leq |i_s - i_{s-1}| \leq n$ ($s = 1, 2, \dots, n$), vagyis

$$|i_s - i_{s-1}|^{-a} \geq n^{-a},$$

hiszen $0 < a$ miatt az $x \mapsto x^{-a}$ függvény szigorúan csökkenő. Ezt (10)-zel egybevetve

$$2\beta > \sum_{s=1}^n |i_s - i_{s-1}|^{-a} \geq \sum_{s=1}^n n^{-a} = n \cdot n^{-a} = n^{1-a}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy tetszőleges n természetes számra

$$2\beta > n^{1-a},$$

ami ellentmondás, mert $0 < 1 - a$ miatt a jobb oldal minden határon túl nő. Ezzel állításunkat beláttuk.

Eredményeinket a következőképpen foglalhatjuk össze.

a) Ha $a \geq 1$, akkor létezik olyan (x_k) sorozat, amelyre valamilyen $0 < \beta$ korláttal $|x_k| < \beta$ ($k = 0, 1, \dots$), továbbá $i \neq j$ ($i, j \in \mathbb{N}$) esetén $|x_i - x_j| \cdot |i - j|^a \geq 1$ teljesül

b) Ha $a < 1$, akkor ilyen sorozat nem létezik.

c) Az $a = 1$ -re megadott sorozat minden $a \geq 1$ -re megfelelő, $a = 1$ -re meg tudunk adni olyan sorozatot, amelynek korlátja $\beta = \frac{\sqrt{5}+3}{4}$ ($\approx 1,309$).

Fent közölt módszerünkkel $\beta < \frac{5}{4}$ ($= 1,25$) már nem érhető el.

Nincs olyan sorozat, amelynek korlátja $\beta \leq 1$ lenne.

Kérdés, hogy hol a határ az 1 és a $\frac{\sqrt{5}+3}{4}$ között.