I. rész

1. *Határozza meg azt a négy, egymás után következő páratlan számot, amelyek négyzeteinek összege 48-cal nagyobb, mint a középük eső páros számok négyzeteinek összege!*

Megoldás. Legyen a négy egymást követő páratlan szám: $a-3$, $a-1$, $a+1$, $a+3$. Ekkor a feltételek szerint:

$$(a-3)^2+(a-1)^2+(a+1)^2+(a+3)^2=(a-2)^2+a^2+(a+2)^2+48.$$

Ennek megoldása: $a_1=6$, $a_2=-6$. Tehát a keresett 4 páratlan szám: 3, 5, 7, 9, illetve -9, -7, -5, -3.

2. *Az egységnyi oldalú $ABCD$ négyzet AB, BC, CD és DA oldalán rendre vegye fel az E, F, G, H pontokat úgy, hogy $AE=\frac{1}{2}$, $BF=\frac{1}{3}$, $CG=\frac{2}{3}$ és $DH=\frac{1}{2}$ legyen. Számítsa ki az $EFGH$ négyszög szögeit, kerületét, területét!*

Megoldás. $EFGH$ négyszög szimmetrikus trapéz, szögei 78,69°, illetve 101,31°. Oldalai a Pitagorasz-tétel alapján:

$$EH=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad FG=\frac{2}{3}\sqrt{2},\quad EF=HG=\frac{\sqrt{13}}{6}.$$

A kerülete: $k=\dfrac{7\sqrt{2}+2\sqrt{13}}{6}\approx 2{,}85$ (egység).
A területe: $t=1-\dfrac{1}{8}-2\cdot\dfrac{1}{12}-\dfrac{2}{9}=\dfrac{35}{72}$ (területegység).

3. *Az 1, 2, 3 számjegyekből hatjegyű számokat képezünk.*
a) Hányféle különböző számot kaphatunk?
b) Hány olyan szám van, amely mindhárom számjegyet legalább egyszer tartalmazza?
c) Mi a valószínűsége, hogy a kapott szám páros?
d) Mi a valószínűsége, hogy a kapott szám 3-mal osztható?

Megoldás. *a)* $3^6=729$.

b) Nem jók a csupa azonos jegyből állók: 3 db, továbbá a pontosan kétféle számjegyet tartalmazók: $3(2^6-2)$ db. A keresettek száma: $3^6-3-3(2^6-2)=540$.

c) Páros a szám, ha utolsó jegye 2. Ilyen szám 3^5 db van. A keresett valószínűség: $\dfrac{3^5}{3^6}=\dfrac{1}{3}$.

d) Az egyik jeggyel, pl. az utolsóval elérhető, hogy a szám osztható legyen 3-mal. Ha az első öt jegy összege osztható 3-mal, akkor 3-at írunk, ha 1 maradékot ad, akkor 2-t, ha 2-t ad, akkor pedig 1-et. Így 3^5 db 3-mal osztható szám van. A keresett valószínűség: $\dfrac{3^5}{3^6}=\dfrac{1}{3}$.

4. *Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:*

$$\log_{\sin x}(1-\cos^2 x)=2^{\sqrt{4-x^2}}.$$

Megoldás. Az egyenlet akkor értelmezhető, ha

$$\sin x>0,\quad \sin x\neq 1,\quad 1-\cos^2 x=\sin^2 x>0\quad \text{és}\quad 4-x^2\geq 0.$$

Ezek akkor teljesülnek, ha $x\in\,]0;2]\,/\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. Ekkor az egyenlet ekvivalens a $2=2^{\sqrt{4-x^2}}$ egyenlettel, melynek megoldása: $x_1=\sqrt{3}$, $x_2=-\sqrt{3}$. Az értelmezési tartomány miatt az egyenlet megoldása: $x=\sqrt{3}$.

II. rész

5. *Péter 1000 kötetes könyvtára magyar, angol és német nyelvű könyvekből áll. A könyvek p%-a magyar nyelvű, az idegen nyelvű könyvek p%-a angol nyelvű, német nyelvű könyve mindössze 10 db van. Határozza meg a magyar és az angol nyelvű könyvek számát!*

Megoldás. Legyen a az angol, m a magyar nyelvű könyvek száma. Ekkor

$$a+m=990,\quad 1000\cdot\frac{p}{100}=m\quad \text{és}\quad (a+10)\frac{p}{100}=a.$$

Ezekből rendezéssel kapjuk a következőt: $m^2-2000m+990\,000=0$, ennek a megoldása 1100, illetve 900. A feladat szövege alapján csak a 900 a megfelelő. Így 900 magyar és 90 angol nyelvű könyv van a könyvtárban.

6. *Legyen*

$$f(x)=\frac{1-\frac{4x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}-\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{x^2-1}}.$$

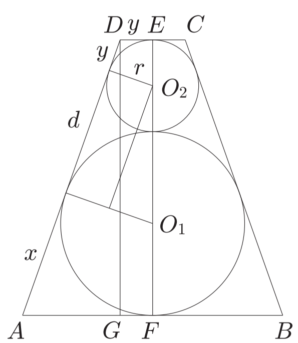
a) Mi a fenti kifejezés értelmezési tartománya?
b) Hozza a kifejezést a lehető legegyszerűbb alakra!
c) Hány rácsponton halad át az $f(x)$ függvény grafikonja?

Megoldás. a) $x\in R\backslash\{-1;1\}$.
b) $f(x)=\dfrac{1-3x}{x-1}$.
c) $f(x)=\dfrac{1-3x}{x-1}=\dfrac{-3(x-1)-2}{x-1}=-3-\dfrac{2}{x-1}$.
Ennek a képe egy hiperbola, mely akkor megy keresztül rácsponton, ha x egész és $x-1$ osztója a 2-nek, azaz $x-1=-2;-1;1;2$, vagyis $x=-1;0;2;3$. Az f grafikonja tehát négy rácsponton halad át: $(-1;-2)$, $(0;-1)$, $(2;-5)$, $(3;-4)$.

7. *Egy szobor két egymásra rakott gömbből áll, ahol a felső gömb sugara fele az alsó gömb sugarának, a szobor magassága 3 méter. A tél viszontagságai ellen védeni akarták a szobrot, ezért pályázatot írtak ki „védőruha" készítésére. Két pályamunka érkezett, az egyik négyzet alapú csonkagúla, a másik csonkakúp alakú védőruhát javasolt. Mindkettő palástja érinti a két gömböt és a fedőlapja a kisebbik gömböt (alaplapja egyiknek sincs). A csonkakúp alakú terv fajlagos költsége* 12 000 Ft/m^2, *a csonkagúláé* 10 000 Ft/m^2. *Melyik pályamunka kivitelezése lenne olcsóbb?*

Megoldás. Tekintsük a gömbök középpontját tartalmazó síkmetszetet (a gúla esetén ez a sík felezze az alap és fedőlap két szemközti oldalát). Jelölje r a kisebbik gömb sugarát. Ekkor $d=\sqrt{9r^2-r^2}=2\sqrt{2}r$. Legyen $AF=FB=x$, illetve $DE=EC=y$, ekkor $AD=x+d+y$. Jelölje a két gömb középpontját O_1 és O_2.

Megoldás. Mivel $AFO_1\sim O_2ED$, azért $\dfrac{2r}{y}=\dfrac{x}{r}$, vagyis $xy=2r^2$.



Az AGD derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel szerint:

$$(x+d+y)^2=(x-y)^2+(6r)^2.$$

Ezek alapján kapjuk, hogy $x=2r\sqrt{2}$, $y=\dfrac{r\sqrt{2}}{2}$.
Mivel a szobor magassága $2r+4r=3$, így $r=0,5$.
Írjuk fel mindkét esetre a meghatározott adatokkal a felszínt.

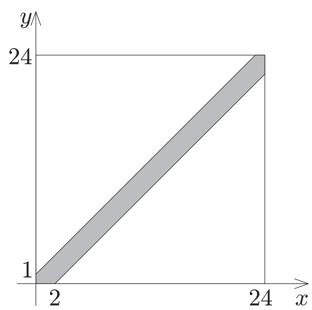
$$A_{\text{cskúp}}=\pi y^2+\pi(x+y)(x+y+d)=\frac{23}{4}\pi\approx 18{,}06\ (\text{m}^2),$$

$$A_{\text{csgúla}}=(2y)^2+4\frac{(2x+2y)(x+y+d)}{2}=23\ (\text{m}^2).$$

A csonkakúp-terv megvalósítása $18{,}06\cdot 12\,000=216\,720$ Ft, a csonkagúla-tervé pedig $23\cdot 10\,000=230\,000$ Ft lenne, tehát a csonkakúp-javaslat kivitelezése olcsóbb.

8. *Egy logisztikai központba 24 órás időtartamon belül véletlen időpontban két kamion érkezik. Az előbb érkezőből rögtön megkezdik a kirakodást, mely az egyiken 1 órát, a másikon 2 órát vesz igénybe. Ha a második kamion akkor érkezik, amikor a másikon még rakodnak, úgy várakoznia kell a rakodás befejezéséig. Mi a valószínűsége annak, hogy valamelyik kamionnak várakoznia kell a rakodásra?*

Megoldás. Jelölje x az 1 óra alatt kipakolható kamion érkezési idejét, y pedig a másikét, ahol $0\le x\le 24$, $0\le y\le 24$. Ekkor a kamionok érkezését koordinátarendszerben szemléltethetjük az $(x;y)$ koordinátájú pontokkal.



Ha $x < y$, akkor a két kamion találkozásának a feltétele, hogy $y < x + 1$, ha $x > y$, akkor $y + 2 > x$. A jó pontok a szürke részben találhatók. Így a keresett valószínűség:

$$\frac{24 \cdot 24 - \frac{1}{2} \cdot 23 \cdot 23 - \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 22}{24 \cdot 24} \approx 0{,}12.$$

9. *Legyen egy sorozat n-edik eleme $a_n = \dfrac{2}{(2n+1)(2n+3)}$, ahol $n \in \mathbb{N}^+$.*

a) Állapítsa meg b és c értékét úgy, hogy minden n-re $a_n = \dfrac{b}{2n+1} - \dfrac{c}{2n+3}$ legyen!

b) Számítsa ki az első 2005 tag összegének ötödik tizedesjegyét!

Megoldás.

a)
$$a_n = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{b}{2n+1} - \frac{c}{2n+3} = \frac{2n(b-c) + 3b - c}{(2n+1)(2n+3)},$$

ez minden n-re akkor teljesül, ha $b = c$ és $3b - c = 2$, azaz $b = 1$ és $c = 1$.

b)
$$S_{2005} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{4011} - \frac{1}{4013} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4013} =$$

$$= \frac{4010}{12\,039} = 0{,}333\,084\,143\ldots.$$

Tehát az 5. tizedesjegy a 8.