

## I. rész

1. Az alábbi kifejezések közül hány lesz egyenlő az  $x^x + x^x$  összeggel minden  $x > 0$  valós számra?

I.  $2 \cdot x^x$     II.  $x^{2x}$     III.  $(2x)^x$     IV.  $(2x)^{2x}$

(A) 0    (B) 1    (C) 2    (D) 3    (E) 4    (1 pont)

2. Adja meg a következő kifejezés számértékét:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{2005} : \frac{3^{2006} + 15^{2006}}{5^{2006} + 5^{4012}}.$$

Válaszát indokolja!

(A) 1    (B) 5    (C)  $\frac{3}{5}$     (D)  $\frac{5}{3}$     (E) 3    (2 pont)

3. Anna és Béla 2005. március 1-jén álltak munkába egy üzletláncnál. Annának olyan a beosztása, hogy három ledolgozott nap után kap egy szabadnapot, míg Béla hét ledolgozott nap után kap három szabadnapot. Az elkövetkező 120 nap alatt hány esetben esik a szabadnapjuk ugyanarra a napra? (2 pont)

4. Adottak az  $ABCD$  négyszög négy csúcsának a koordinátái:  $A(-3; 1)$ ,  $B(-4; -5,5)$ ,  $C(8; -1)$ ,  $D(5; 4)$ .

Az alábbi állítások közül melyik igaz?

a) Az  $ABCD$  négyszög paralelogramma.

b) Az  $ABCD$  négyszög trapéz.

(2 pont)

5. 2004-ben egy kerékpár ára 32 000 Ft, egy kerékpáros bukósisak ára 8 000 Ft volt. 2005-ben a kerékpár ára 5%-kal, a bukósisak ára 10%-kal emelkedett. Hány %-kal emelkedett a kerékpár és a bukósisak együttes ára 2005-ben?

(A) 6%    (B) 7%    (C) 7,5%    (D) 8%    (E) 15%    (2 pont)

6. Adottak az  $A$ ,  $B$  és  $C$  véges halmazok:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 \leq 4\}, \quad B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| = 2\},$$

$$C = \{x \mid x \text{ prímszám és } 0 < x < 6\}.$$

a) Sorolja fel az  $A$ ,  $B$  és  $C$  halmazok elemeit!

b) Adja meg az  $A \cap B \cap C$  halmaz elemeit!

c) Igaz-e, hogy  $B$  részhalmaza az  $A$  halmaznak? Állítását indokolja!

(3 pont)

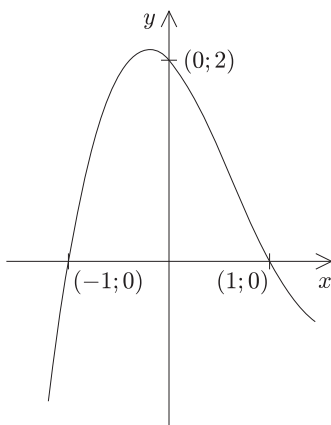
7. Milyen valós értékekre értelmezhetőek a következő kifejezések?

a)  $\sqrt{x^2 - 1}$     b)  $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{1 - x}$ .    (2 pont)

8. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:  $4^x - 2^{x+1} = 3$ . (3 pont)

9. Anna megfázott, belázasodott és szúrt a torka. Az orvos kétféle kapszulát írt fel neki: egy zöldet és egy fehéret. A zöldből naponta 3 darabot, a fehérből naponta 2 darabot kell beszednie két hétig. A kétféle gyógyszerért 1470 Ft-ot fizetett a gyógyszerárban. A gyógyszerész azt mondta neki, hogy a fehér kapszula darabja 10 Ft-tal kerül kevesebbe, mint a zöld kapszuláé. Milyen drága a zöld, illetve a fehér kapszula darabja? (3 pont)

10. Az ábrán az  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  harmadfokú függvény grafikonjának egy szakasza látható. Mennyi  $b$  értéke?



(A)  $-4$  (B)  $-2$  (C)  $0$  (D)  $1$  (E)  $4$  (3 pont)

11. Egy egyenes körkúp alakú tölcsérbe a fagyaltos egy gömb alakú eperfagyalt gombócot nyomott bele. A tölcsér és a fagyaltgömb átmérője egyenlő. Ha a fagyaltgömb elolvad, éppen megtölti a tölcsért. Az olvadt fagyalt térfogata 75%-a a fagyott állapotú fagyalt térfogatának. Határozza meg a tölcsérkúp magasságának és a fagyaltgömb sugarának az arányát! (3 pont)

12. Adott az  $ABCD$  konvex négyszög. Hosszabbítsuk meg a négyszög mindegyik oldalát, azonos körüljárási irányban, a saját hosszával. Mennyi az így kapott  $A'B'C'D'$  négyszög és az  $ABCD$  négyszög területének az aránya? Válaszát indokolja!

(A)  $4:1$  (B)  $5:1$  (C)  $6:1$  (D)  $7:1$  (E)  $8:1$  ( pont)

## II./A rész

13. a) Ábrázolja a valós számok halmazán értelmezett  $x \mapsto \cos 2x$  függvényt és határozza meg az  $x \mapsto \cos 2x$  függvény szélsőérték helyeit, azok jellegét és értékét! (6 pont)

b) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\operatorname{ctg}^2 x - 8 \sin^2 x = 1. \quad (6 \text{ pont})$$

14. Az  $e: x - 2y = 3$  és az  $f: 3x - y = 4$  egyenletű egyenesek egymást az  $M$  pontban metszik.

a) Határozza meg az  $M$  metszéspont koordinátáit!

b) Írja fel annak a  $h$  egyenesnek az egyenletét, amelyik átmegy az  $M$  ponton és merőleges a  $g: 2x - 3y = 1$  egyenletű egyenesre!

c) Adja meg a  $h$  egyenesnek a koordinátatengelyekkel való metszéspontjainak a koordinátáit! (12 pont)

15. Az  $ABC$  háromszögben az  $AB$  oldal hossza 1 cm, az  $AC$  oldal hossza 2 cm, a  $BC$  oldal hossza megegyezik az  $A$  csúcsból induló súlyvonal hosszával. Milyen hosszú az  $ABC$  háromszög  $BC$  oldala? (12 pont)

## II./B rész

16. Három papírcédulára ráírjuk külön-külön az 1, 2, 3 számokat, majd betesszük a három cédulát egy kalapba. A kalapból kihúzzunk egy cédulát és feljegyezzük a rajta levő számot, majd visszatesszük a cédulát a kalapba. A húzást még kétszer megismételjük. Mindegyik cédula kihúzásának esélye egyenlő. Ha a feljegyzett számok összege 6, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy a 2-es számot tartalmazó cédulát háromszor húztuk ki? (17 pont)

17. Egy számtani sorozat  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  tagjaira teljesül, hogy

$$a_4 + a_7 + a_{10} = 17, \quad a_4 + a_5 + a_6 + \dots + a_{13} + a_{14} = 77.$$

a) Határozza meg a számtani sorozat hetedik tagját!

b) Határozza meg a számtani sorozat kilencedik tagját!

c) Adja meg a számtani sorozat differenciáját (különbségét)!

d) Számolja ki a számtani sorozat első tagját!

e) Határozza meg, hogy a 13. hányadik tagja a sorozatnak! (17 pont)

18. A pallagi természetvédelmi területen levő fácánfarmon a fácánok száma úgy növekszik, hogy az  $(n+2)$ -edik évi állomány létszáma és az  $n$ -edik évi állomány létszáma közti különbség egyenesen arányos az  $(n+1)$ -edik évi állomány létszámával.

a) Ha 2001-ben 39, 2002-ben 60, 2004-ben 123 volt a fácánok száma, akkor mekkora volt a fácánállomány 2003-ban?

b) Ábrázolja oszlopdiaagramon, hogy hogyan alakult a fácánok évenkénti létszáma 2001 és 2004 között a pallagi természetvédelmi területen! (17 pont)