

## I. rész

1. Határozza meg az  $a$  és  $b$  pozitív egész számok lehetséges értékeit, ha  $a < b$ , továbbá teljesül, hogy ha  $x$  és  $y$  eleme az  $[a; b]$  intervallumnak, akkor  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  is eleme  $[a; b]$ -nek! (12 pont)

2. a) Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\sqrt{1 + x\sqrt{x^2 - 16}} = x - 1$$

egyenletet!

(5 pont)

b) Adja meg a fenti egyenlet alaphalmazát!

(7 pont)

3. Egy autókereskedő ötfajta autót forgalmaz. Az egyes fajták darabját

2,3    2,8    3    3,1    3,5

Mft-ért adja el, és nyeresége (az eladási ár és a beszerzési ár különbsége) fajtánként a fenti sorrendben az eladási ár

3    2,5    2,4    2,1    2

százaléka. Ez a két adatsor a további vizsgálatok során nem változik. Az egyes fajtákból (fenti sorrendben)

2003-ban	25	32	27	38	19	darabot,
2004-ben	27	31	29	32	33	darabot

adott el.

a) Mennyi volt a nyeresége 2003-ban, és mennyi 2004-ben? (5 pont)

b) Ha 2005-ben csak egy autófajtát forgalmaz, akkor melyik autófajtát (mennyi annak az egységára) érdemes forgalmaznia, és abból legalább hányat kell eladnia, ha a lehető legkevesebb autó eladásával akarja elérni a 2004-es nyereségét? (7 pont)

4. Az  $r$  és az  $R$  sugarú körök kívülről érintik egymást, és  $r < R$ . Közös külső érintőik szöge  $\alpha$ .

a) Mennyi  $\frac{R}{r}$ , ha  $\alpha = 60^\circ$ ? (5 pont)

b) Mennyi  $\alpha$ , ha  $\frac{R}{r} = \frac{5}{3}$ ? (5 pont)

c) Mennyi annak a négyszögnek a területe, amelynek két csúcsa a körök középpontja, további két csúcsa pedig az egyik közös külső érintőn levő két érintési pont, ha  $R = 5$  és  $r = 3$ ? (5 pont)

## II. rész

5. A  $H$  halmaz a 2005-nél nem nagyobb pozitív egész számok halmazának olyan részhalmaza, hogy tetszőleges két elemének összege nem osztható hárommal. Legfeljebb hány eleme van ennek a  $H$  halmaznak? (14 pont)

6. Egy dobozban öt piros golyó van.

a) Hány fehér golyót kell a dobozba tennünk, ha azt akarjuk, hogy ezután a dobozból a golyók közül egyet véletlenszerűen kihúzva (a golyók kihúzásának valószínűsége megegyezik) a kihúzott golyó 0,25 valószínűséggel piros legyen? (6 pont)

b) Legalább hány fehér és legalább hány fekete golyót kell a dobozba tennünk (mindegyikből legalább egyet teszünk), ha azt akarjuk, hogy ezután a dobozból a golyók közül egyet véletlenszerűen kihúzva, a kihúzott golyó 0,25 valószínűséggel ne fekete legyen? (10 pont)

7. Oldja meg a valós számok halmazán az

$$\log_x(x^2 + x - 4) < 1$$

egyenlőtlenséget!

(16 pont)

8. Legyen  $A$  az a háromoldalú egyenes hasáb, amelynek alaplappja 2 oldalhosszúságú szabályos háromszög és oldalélének hossza is 2. Az egyik oldallapjának középpontján áthaladó, a lapra merőleges egyenes körül forgassuk el az  $A$  testet  $90^\circ$ -kal, és jelöljük  $A'$ -vel az elforgatott testet!

Mennyi az  $A \cup A'$  test

a) térfogata? (8 pont)

b) felszíne? (8 pont)

9. a) Írja fel azoknak a paraboláknak az egyenletét, amelyek grafikonja a  $P(1; 0)$  pontban érinti az  $y = 2 - 2x$  egyenletű egyenes grafikonját, és tengelye az  $y$  tengellyel párhuzamos! (9 pont)

b) Hol helyezkednek el ezeknek a paraboláknak a csúcspontjai? (9 pont)