1. *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:*

a) $(2y-1)(y-1)=0$; *b)* $2^{2x+1}-3\cdot 2^x+1=0$;

c) $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$; *d)* $2\cdot\log_2^2 x-\log_2 x^3+1=0$.

Megoldás. *a)* $y_1=\frac{1}{2}$, $y_2=1$.

b) Legyen $2^x=y$. Ekkor $2^x=\frac{1}{2}$ vagy $2^x=1$; $x_1=-1$, $x_2=0$.

c) Legyen $\sin x=y$. Ekkor $\sin x=\frac{1}{2}$ vagy $\sin x=1$; $x_{1,n}=\frac{\pi}{6}+2n\pi$, $x_{2,k}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, $x_{3,m}=\frac{\pi}{2}+2m\pi$, ahol $n,k,m\in\mathbb{Z}$.

d) Legyen $\log_2 x=y$. Ekkor $\log_2 x=\frac{1}{2}$ vagy $\log_2 x=1$; $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=2$.

2. *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:*

a) $2y^2-3y+1>0$; *b)* $2^{2x+1}-3\cdot 2^x+1>0$;

c) $2\sin^2 x-3\sin x+1<0$; *d)* $2\cdot\log_2^2 x-\log_2 x^3+1>0$.

Megoldás. *a)* $y<\frac{1}{2}$ vagy $y>1$.

b) $2^x<\frac{1}{2}$ vagy $2^x>1$; $x<-1$ vagy $x>0$.

c) $\frac{1}{2}<\sin x<1$; $\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi$ vagy $\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{6}+2k\pi$.

d) $\log_2 x<\frac{1}{2}$ vagy $\log_2 x>1$; $0<x<\sqrt{2}$ vagy $2<x$.

3. *Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög egyik befogójának végpontjai: $A(-2;3)$ és $B(1;2)$. Számítsuk ki a háromszög harmadik csúcspontjának koordinátáit.*

Megoldás. A feltételeknek négy egyenlő szárú derékszögű háromszög felel meg. Állítsunk az AB szakasz két különböző partjára 1–1 négyzetet, $ABCD$-t és ABC_1D_1-et. A negyedik csúcs a C, D, C_1, D_1 pontok bármelyike lehet. A feladatot a vektorszerkesztés módszerével oldhatjuk meg (természetesen más módokon is). Most $\overrightarrow{AB}=(3;-1)$, így $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=(1;3)$ és $\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{AD_1}=(-1;-3)$, hiszen ezek a vektorok az $\overrightarrow{AB}$ 90°-os elforgatottjai. Ekkor

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=(1;2)+(1;3)=(2;5),$$

$$\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC_1}=(1;2)+(-1;-3)=(0;-1),$$

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=(-2;3)+(1;3)=(-1;6),$$

$$\overrightarrow{OD_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD_1}=(-2;3)+(-1;-3)=(-3;0).$$

A harmadik csúcspontok: $C(2;5)$, $C_1(0;-1)$, $D(-1;6)$, $D_1(-3;0)$.

4. *Számítsuk ki p és q értékét, ha az $x^2+px+q=0$ egyenlet egyik gyöke 2, a másik gyöke pedig az egyenlet diszkriminánsának háromszorosa.*

Megoldás. Mivel $x_1=2$, $x_2=3D$, azért az egyenlet $x^2-(2+3D)x+6D=0$ alakban írható és így

$$D=(2+3D)^2-24D.$$

$9D^2-13D+4=0$, $D=1$, vagy $D=\frac{4}{9}$. Ha $D=1$, akkor $p=-5$, $q=6$; ha $D=\frac{4}{9}$, akkor $p=-\frac{10}{3}$, $q=\frac{8}{3}$.

5. *Az ABC háromszögben $AC=10$, $BC=15$ és $ACB\sphericalangle=60^\circ$.*

a) Mekkora annak a félkörnek a sugara, amelynek átmérője az AB oldalra esik, és érinti a másik két oldalt?

b) Mekkora annak a körnek a sugara, amely érinti az előbbi félkört, valamint az AC és BC oldalakat?

Megoldás. Legyen a félkör sugara r, a keresett kör sugara x. A félkör középpontját jelölje O, a kör középpontját O_1, a félkör és a kör érintési pontját E. A kör, illetve a félkör az AC és a BC oldalt az E_1 és E_2, illetve F_1 és F_2 pontban érinti. A C, O_1, E és O pontok az ACB szög szögfelezőjére illeszkednek. Az $E_1CO_1\sphericalangle=30^\circ$, az E_1O_1C háromszög derékszögű, mint az F_1OC háromszög is. $O_1E_1=x$, $O_1C=2x$, $OF_1=r$, $OC=2r$, $OC=OE+EC=r+3x$, tehát $2r=r+3x$, $r=3x$. Az ABC háromszög területe

$$\text{egyrészt}\quad \frac{10\cdot 15\cdot\sin 60^\circ}{2}=\frac{75\sqrt{3}}{2},\qquad \text{másrészt}\quad \frac{10r}{2}+\frac{15r}{2}=\frac{25r}{2},$$

így a félkör sugara $r = 3\sqrt{3}$, a kör sugara $x = \sqrt{3}$.

6. *Egy számtani sorozat differenciája* $\frac{2}{3}$, *az első* n *tag összege* $\frac{8}{3}$, *az első* $(n+3)$ *tag összege* $\frac{44}{3}$. *Számítsuk ki* n *értékét és a sorozat első tagját.*

Megoldás. A feltételből következik, hogy $a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = \frac{44}{3} - \frac{8}{3}$, azaz $3a_{n+2} = 12$, $a_{n+2} = 4$; így $4 = a_1 + (n+1) \cdot \frac{2}{3}$, $3a_1 + 2n = 10$.

$$\frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1) \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3},$$

amiből $n(6a_1 + 2n - 2) = 16$, s mivel $3a_1 = 10 - 2n$, azért $n^2 - 9n + 8 = 0$. Ha $n = 8$, akkor $a_1 = -2$, ha $n = 1$, akkor a feltételek nem teljesülnek.

7. *Tekintsük az* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \frac{(x+5)^2 - (x-5)^2}{(2x+5)^2 + (2x-5)^2}$ *függvényt. Számítsuk ki a függvény legnagyobb és legkisebb értékét, valamint azokat az* x *értékeket, ahol ezeket a függvény felveszi.*

Megoldás. Az $f(x)$ kifejezés minden valós x-re értelmezett. Azonos átalakításokkal $f(x) = \frac{10x}{4x^2+25}$. Az f függvény páratlan, hiszen $f(-x) = \frac{10(-x)}{4(-x)^2 + 25} = -f(x)$.

Ismeretes, hogy ha $A > 0$ és $B > 0$, akkor $A + B \geq 2\sqrt{AB}$, és az egyenlőség pontosan $A = B$ esetén áll fenn.

Ha $x > 0$, akkor $f(x) > 0$ és $f(x) = \frac{10}{4x + \frac{25}{x}}$, tehát a számláló pozitív állandó, a nevező pozitív, így $f(x)$ akkor a legnagyobb, amikor a nevező a legkisebb. Most

$$4x + \frac{25}{x} \geq 2\sqrt{4x \cdot \frac{25}{x}} = 20, \quad \text{tehát} \quad f(x) \leq \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

és az egyenlőség $4x = \frac{25}{x}$ $(x > 0)$ esetén áll fenn, azaz $x = \frac{5}{2}$.

Ha $x < 0$, akkor $f(x) < 0$ és $f(x) \geq -\frac{1}{2}$, egyenlőség $x = -\frac{5}{2}$ esetén áll fenn. Így $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$, a minimumot $\left(-\frac{1}{2}\right)$ az $x = -\frac{5}{2}$ helyen, a maximumot $\left(\frac{1}{2}\right)$ az $x = \frac{5}{2}$ helyen veszi fel a függvény.

8. *Az* $ABCD$ *konvex négyszög* AC *és* BD *átlóinak metszéspontja* K. *Az* ABK, BCK, CDK *és a* DAK *háromszögek területe rendre* t_1, t_2, t_3 *és* t_4. *Igazoljuk, hogy a négyszög* AB *és* DC *oldalai pontosan akkor (akkor és csak akkor) párhuzamosak, ha a négyszög* T *területe* $T = \left(\sqrt{t_1} + \sqrt{t_3}\right)^2$.

Megoldás. A t_1 és t_2, illetve a t_3 és t_4 területű háromszögek egy-egy magassága megegyezik, így $\frac{t_1}{t_2} = \frac{t_4}{t_3}$, $t_1t_3 = t_2t_4$.

Ha AB és DC párhuzamosak (azaz a négyszög trapéz), akkor $t_1 + t_2 = t_1 + t_4$, $t_2 = t_4$; a négyszög területe $T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = t_1 + t_3 + 2t_2$ és $t_1t_3 = t_2^2$, $\sqrt{t_1t_3} = t_2$, $T = t_1 + t_3 + 2\sqrt{t_1t_3} = \left(\sqrt{t_1} + \sqrt{t_3}\right)^2$.

Legyen $T = \left(\sqrt{t_1} + \sqrt{t_3}\right)^2$, ekkor $t_1 + t_3 + 2\sqrt{t_1t_3} = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$, $2\sqrt{t_1t_3} = t_2 + t_4$, de $t_1t_3 = t_2t_4$, így $t_2 + t_4 - 2\sqrt{t_2t_4} = 0$, $\left(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_4}\right)^2 = 0$, amiből $t_2 = t_4$.

Így $t_1 + t_2 = t_1 + t_4$, a közös AB oldalú ABC és ABD háromszögek területe egyenlő, az AB oldalhoz tartozó magasság is egyenlő, azaz a D és a C pontok az AB oldaltól egyenlő távolságra vannak, tehát AB párhuzamos CD-vel.