1. *a*) $9-(x-1)^2>0 \Rightarrow 9>(x-1)^2 \Rightarrow -3<x-1<3 \Rightarrow -2<x<4$.

b) A jobb oldal átalakítása után: $2|\sin x|=\sqrt{3} \Rightarrow |\sin x|=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

c) Olyan $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ értékeket keresünk, amelyekre igaz, hogy: $-2<x<4$. Ezek a következők: $x=\pm\dfrac{\pi}{3}$; $x=\dfrac{2\pi}{3}$.

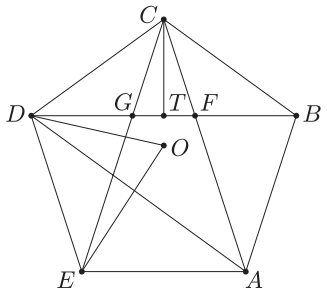
2. $DOE\sphericalangle=\dfrac{360^\circ}{5}=72^\circ$; $ODE\sphericalangle=BCT\sphericalangle=54^\circ$; $BCD\sphericalangle=108^\circ$; $BCD\sphericalangle=108^\circ$; $CBD\sphericalangle=36^\circ$. Legyen $CB=a$.

$$a=\frac{4}{\sin 54^\circ}\approx 4{,}94 \text{ cm}.$$

Az ötszög területe a DEO háromszög területének az ötszöröse.

$$t=5\cdot\frac{4{,}94^2\sin^2 54^\circ}{2\sin 72^\circ}\approx 41{,}99 \text{ cm}^2.$$

BF kiszámítása: $ABCD$ trapéz átlói az alapok arányában osztják egymást, mert a BCF és a DAF háromszögek hasonlóak. Legyen $BF=DG=x$, $\dfrac{8-x}{x}=\dfrac{8}{4{,}94}$; $x\approx 3{,}05$ cm. $DG=3{,}05$ cm, $FG=8-2x\approx 1{,}9$ cm.



3. *a*) Legyenek a számok sorrendben:

$$\overline{xy}=10x+y;\quad \overline{yx}=10y+x;\quad \overline{x0y}=100x+y.$$

$$100x+y-(10y+x)=10y+x-(10x+y);$$

$$y=6x$$

egyenletből az $x=1$ és az $y=6$ megoldás adódik. Így az egyes táblákon a 16; 61; 106 számok láthatók. A keresett sebesség: $v=106-61=61-16=45\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$.

b) A kérdésre a következő egyenlet megoldása adja a választ. Legyen visszafelé a sebesség $u\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$. Ekkor:

$$\frac{180}{2+\frac{90}{u}}=45\cdot\frac{6}{5},$$

innen $u=67{,}5\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$.

4. Könnyen belátható, hogy hárommillió Ft alatt a második befektetés a jobb, hiszen az éves kamat 6,4%-nál is magasabb, míg az elsőnél csak 5,5%, ill. 6%. Ezért először kiszámítjuk, hogy 3 millió Ft mennyire növekszik két év alatt, millió Ft-ban számolva:

Az első változat szerint

1. év: $\quad 1\cdot 1{,}055+2\cdot 1{,}06=3{,}175$

2. év: $\quad 3{,}175+0{,}175\cdot 1{,}07=3{,}362\,25.$

További x összeget betéve:

$$T(x)=1{,}07^2x+3{,}362\,25=1{,}1449\,x+3{,}362\,25.$$

A második konstrukcióban

$$t(x)=1{,}016^8x+3\cdot 1{,}016^8=1{,}135\,402\,x+3{,}406\,206.$$

A $T(x) = t(x)$ egyenlet gyöke adja azt az x értéket, melynél nagyobb x esetén az első, kisebb x esetén pedig a második befektetés a jobb.

$$1{,}1449\,x + 3{,}36255 = 1{,}135\,402\,x + 3{,}406\,206; \quad x \approx 4{,}596\,336.$$

Tehát 4 596 336 Ft-nál nagyobb összegű tőke esetén az első befektetési forma kedvezőbb.

5. *a*) A háromnál nagyobb prímszámok páratlanok, tehát mindkét szomszédjuk páros. Legyen a három szám: $p-1$; p; $p+1$. Három egymást követő természetes szám közül az egyik osztható 3-mal. De ez nem lehet a p, mert háromnál nagyobb. Így a $p-1$ és a $p-2$ közül az egyik hárommal is és kettővel is osztható, tehát osztható hattal.

b) $n^4 + 4 = (n^2+2)^2 - 4n^2 = (n^2+2-2n)(n^2+2+2n)$ és a kisebbik tényező

$$n^2 + 2 - 2n = (n-1)^2 + 1 > 1.$$

A második tényező meg ennél is nagyobb, a szorzat tehát összetett szám.

6. Kétféleképpen fordulhat elő, hogy fiú is és lány is van a felelők között: vagy két fiú és egy lány, vagy egy fiú és két lány felel. Ezen lehetőségek száma:

$$\binom{6}{2} \cdot 4 + \binom{4}{2} \cdot 6 = 96.$$

Az összes lehetőség: $\binom{10}{3} = 120$. Így a kérdezett valószínűség: $p = \dfrac{96}{120} = 0{,}8$.

7. $$\frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{1}{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{1 - \frac{\sin^2 2x}{2}} = \frac{2}{2 - \sin^2 2x},$$

$$-1 \le -\sin^2 2x \le 0,$$

$$1 \le 2 - \sin^2 2x \le 2,$$

$$2 \ge \frac{2}{2 - \sin^2 2x} \ge 1.$$

A függvény értékkészlete az $1 \le x \le 2$ halmaz.

Maximum: $\sin^2 2x = 1$, ekkor

$$\sin 2x = \pm 1; \quad 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Minimum: $\sin^2 2x = 0$, ekkor

$$\sin 2x = 0, \quad 2x = k\pi; \quad x = k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

8. *a*) Abból, hogy 70%+60% = 130%, az következik, hogy a társaság 30%-a mindkét nyelven beszél. Így 70%−30% = 40% csak németül, 60% − 30% = 30% csak franciául beszél.

A válasz: $p = \dfrac{30}{100} = 0{,}3$.

b) Az a 12 személy nem tud franciául, aki csak németül beszél. Ez 40%. Akkor a 30% 9 fő, akik csak franciául beszélnek. Tehát azok száma, akik csak egy nyelvet beszélnek $12 + 9 = 21$.

c) Az eddigiekből kiszámolható, hogy csak németül 12-en, csak franciául 9-en, mindkét nyelven 9-en beszélnek. A 6 érkező tag a harmadik számot 15-re változtatja. A társaság most már 36 tagú. A válasz: $p = \dfrac{9}{36} = 0{,}25$.

9. Legyen: $a_1 = x$, $b_1 = x + 8$ és $a_2 = x - 1$, $b_2 = y$. A két terület egyenlőségéből felírhatjuk, hogy

$$(x-1)y = x(x+8), \quad \text{ebből}$$

$$y = \frac{x(x+8)}{x-1} = \frac{x^2+8x}{x-1} = \frac{x^2 - x + 9x}{x-1} = x + \frac{9x}{x-1},$$

$$y = \frac{9x - 9 + 9}{x-1} + x = x + 9 + \frac{9}{x-1} = x - 1 + \frac{9}{x-1} + 10,$$

$$y = 3\left(\frac{x-1}{3} + \frac{3}{x-1}\right) + 10.$$

Elég a zárójelben lévő kifejezés minimumát meghatározni. Ez egy pozitív számnak és a reciprokának az összege, amely akkor minimális, ha mindkét tag 1.

Tehát $\dfrac{x-1}{3} = 1$, azaz $x = 4$ $y = \dfrac{4 \cdot 12}{3} = 16$. Válasz: $a_1 = 4$; $b_1 = 12$; $a_2 = 3$; $b_2 = 16$.