1. A $3x-2y=22$ egyenletű egyenes normálvektora: $\mathbf{n}(3;-2)$. Ez irányvektora a merőleges egyenesnek, melynek egyenlete: $-2x-3y=-11$ (vagy $2x+3y=11$). A párhuzamos egyenes egyenlete $3x-2y=10$.

2. Legyen $\alpha = VAF\sphericalangle$, $\omega = FVA\sphericalangle$, $\varphi = VFA\sphericalangle$. Írjuk fel a koszinusztételt a VAF háromszög VF oldalára: $VF^2 = VA^2+FA^2-2\cdot VF\cdot FA\cdot\cos\alpha$, ebből: $VF=10{,}87$ km.

Írjuk fel a szinusztételt az ω szögre: $\dfrac{\sin\omega}{\sin\alpha}=\dfrac{FA}{VF}$. Mivel $90^\circ<\alpha$, így $\omega<90^\circ$, tehát $\omega=55{,}12^\circ$. Mivel a háromszög szögösszege 180°, $\varphi=27{,}08^\circ$.

3. Az első egyenlet mindkét oldalának y alapú logaritmusát véve a $\log_y^2 x=4$ egyenlethez jutunk, ebből $\log_y x=-2$ vagy $\log_y x=2$. Mivel a logaritmusfüggvény kölcsönösen egyértelmű, $x=\dfrac{1}{y^2}$, vagy $x=y^2$. Az első esetben a második egyenlet: $2x=\dfrac{82}{9}$, amiből $x_1=\dfrac{41}{9}$, ebből csak az $y_1=\dfrac{3}{\sqrt{41}}$ megoldás felel meg a feltételeknek.

A második esetben a második egyenlet: $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{82}{9}$. Ez a $9x^2-82x+9=0$ egyenlethez vezet, melynek megoldásai $x_2=\dfrac{1}{9}$ és $x_3=9$, ahonnan $y_2=\dfrac{1}{3}$ és $y_3=3$.

4. Legyen az első leértékelés x%-os, a második pedig y%-os. Így az ára:

$$\left(1-\frac{x}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{y}{100}\right)\cdot 36\,000 = 31\,806, \quad \text{ahonnan}$$

$$1165-100x-100y+xy=0, \quad \text{tehát}$$

$$y=\frac{100x-1165}{x-100}=\frac{100(x-100)+8\,835}{x-100}=100+\frac{8\,835}{x-100}.$$

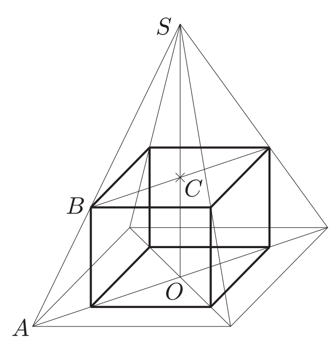
Mivel x és y egészek, a $8\,835$ osztóit keressük. Mivel y és x egészek egyjegyűek, azért $x=5$ és $y=7$, vagy $x=7$ és $y=5$. Tehát a kerékpárt 5 és 7%-kal értékelték le.

2. megoldás: A végső ár: $\dfrac{x}{100}\cdot\dfrac{y}{100}\cdot 36\,000=31\,806$, ebből: $x\cdot y=8\,835$. Tehát $8\,835$ osztóit keressük. Mivel y és x egész számok, valamint 90 és 100 közé esnek: $x=95$ és $y=93$, vagy $x=93$ és $y=95$. A kerékpárt 5 és 7%-kal értékelték le.

5. Szimmetriaokokból a beírt kocka csúcsai az alaplap átlóin és az oldaléleken helyezkednek el. Használjuk az *ábra* jelöléseit és legyen a kocka oldala a, a gúla magassága m. A feltételből: $36a^2=196$, azaz $a=\dfrac{7}{3}$. Ekkor: $AO=7\cdot\sqrt{2}$; $BC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot a=\dfrac{7\sqrt{2}}{6}$. Mivel az AOS háromszög hasonló a BCS háromszöghöz (oldalaik párhuzamosak), a megfelelő oldalak aránya:

$$\frac{BC}{AO}=\frac{m-a}{a}, \quad \text{ebből} \quad m=\frac{49}{18}.$$

A gúla térfogata: $V=\dfrac{4802}{27}\approx 177{,}85$.



6. A számtani sorozat n-edik elemére vonatkozó képlet felhasználásával:

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d, \quad \text{azaz} \quad d=-13+(n-1)\cdot d,$$

ebből: $13=(n-2)d$. Mivel n és d egész számok, azért d osztója a 13-nak, tehát $d=1$, vagy $d=13$.

Az első esetben: $n=15$, ekkor $S_n=-90$.

A második esetben: $n=3$, ekkor $S_n=0$.

7.

$$f(x)=4\sin^2 x\cos^2 x+2\cos^2 x-\frac{5}{4}=4(1-\cos^2 x)\cos^2 x+2\cos^2 x-\frac{5}{4}=$$

$$=-4\cos^4 x+6\cos^2 x-\frac{5}{4}=-\left(2\cos^2 x-\frac{3}{2}\right)^2+1.$$

Mivel egy négyzetszám nem lehet negatív, a kifejezés a $\cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ esetben maximális, azaz ha $x=\frac{\pi}{6}$, vagy $x=\frac{5\pi}{6}$ és a maximum értéke 1.

A kifejezés minimális, ha $\left|2\cos^2 x-\frac{3}{2}\right|$ maximális, azaz ha $\cos x=0$, vagyis az $x=\frac{\pi}{2}$ esetben, és a minimum értéke $-\frac{5}{4}$.

8. Jelöljük a szögeket a szokott módon α-val és β-val, a C csúcsnál lévő szögeket φ-vel. Írjuk fel a következő szinusztételeket: $\frac{f_2}{c_3}=\frac{\sin\beta}{\sin\varphi}$ és $\frac{f_1}{c_1}=\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}$. A két egyenletet elosztva egymással: $\frac{f_1\cdot c_3}{f_2\cdot c_1}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

Hasonló módon: $\frac{f_2}{c_1+c_2}=\frac{\sin\alpha}{\sin 2\varphi}$ és $\frac{f_1}{c_2+c_3}=\frac{\sin\beta}{\sin 2\varphi}$. A két egyenletet elosztva egymással: $\frac{f_2\cdot(c_2+c_3)}{f_1\cdot(c_1+c_2)}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. Mivel a jobb oldalak egyenlők: $\frac{f_1\cdot c_3}{f_2\cdot c_1}=\frac{f_2\cdot(c_2+c_3)}{f_1\cdot(c_1+c_2)}$, ahonnan $\frac{f_1}{f_2}=\sqrt{\frac{c_1\cdot(c_2+c_3)}{c_3\cdot(c_1+c_2)}}$, tehát az állítást bebizonyítottuk.