

1. Határozzuk meg azon egyenes egyenletét, amely átmegy a $P(4; 1)$ ponton és merőleges a $3x - 2y = 22$ egyenletű egyenesre, illetve amely párhuzamos vele.

2. Traianus császár uralkodásának első éveiben a Vesta szűzek temploma (V) és egy új forrás (F) között vízvezetékot kellett építeni. A várost és a forrást elválasztó hegyet olcsóbb volt átfúrni, mint a vízvezetékot az egyenes vonaltól eltérítve lefektetni. Két oldalról akarták elkezdni a fúrást, hogy gyorsabban megépülhessen a tervezett vezeték. Szerencsére a városban tartózkodott az alexandriai Menelaosz, aki a következőképpen oldotta meg a problémát: Ahhoz, hogy a fúrást végző csapatok találkozzanak, ismerni kell a VF egyenes állását. Ennek meghatározásához egy alappontot (A) vett fel, amelyik a várostól 5, a forrástól 9 km távolságra van, s megmérte a VA szöveget: $97,8^\circ$.

a) Határozzuk meg, milyen hosszú lesz a vízvezeték.

b) Mekkora szöveget zárjon be a fúrás helyét megadó VF félegyenes a VA félegyenessel, illetve az FV félegyenes az FA félegyenessel?

3. Oldjuk meg a következő egyenletrendszer az 1-től különböző pozitív valós számpárok halmazán:

$$x^{\log_y x} = y^4; \quad x + \frac{1}{y^2} = \frac{82}{9}.$$

4. Egy 36 000 Ft-os kerékpárt leértékeltek valahány %-kal. Mivel így sem fogyott eléggé, kis idő múlva újra leértékeltek néhány %-kal. Mindkét esetben a leértékelés egyjegyű egész szám volt. Így 31 806 Ft-ért árulták.

Hány %-kal értékelték le először és hány %-kal másodszor a televíziót?

5. A Louvre udvarán felépített üvegpiramis (négyzet alapú egyenes gúla) alapnégyzetének oldala 15. A gúla a tervezők olyan kockát építettek be, amelynek egy lapja illeszkedik a gúla alaplapjára, szemközti lapjának csúcsai pedig a gúla oldaléleire. A kocka oldalfalai, valamint a teteje szintén üvegből vannak. Mekkora az üvegpiramis térfogata, ha az alapnégyzetének beborítására ötször annyi anyagot használtak fel, mint a kocka üvegfalainak elkészítésére?

6. Egy számtani sorozat első eleme -13 . A sorozat n . eleme ($1 < n$) egyenlő a sorozat differenciájával, ami egy pozitív egész szám. Számítsuk ki a sorozat első n elemének összegét.

7. A sürgősségi osztályra sokkos állapotban lévő beteget szállítottak. A szívritmus elemző készülék meghatározta, hogy a beteg szívritmusa az

$$f(x) = \sin^2 2x + 2 \cdot \cos^2 x - \frac{5}{4}$$

függvény szerint változik. Green doktor terápiája szerint akkor kell a gyógyszert adagolni, amikor a szívritmus a legkisebb és legnagyobb értékét veszi fel a $[0; \pi]$ intervallumban, és az adag mennyisége a legkisebb és legnagyobb érték szerint változzon. Sajnos ekkor a gép elromlott. Szerencsére Carter doktor egyben műkedvelő matematikus is, így sikeresen meghatározta a kérdéses szélsőérték-helyeket és szélsőértékeket. Milyen eredményre jutott?

8. Az ABC háromszög C csúcsából induló f_1 és f_2 szögfelezők a szemközti oldalt rendre a c_1 , c_2 , c_3 szakaszokra bontják. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{c_1(c_2 + c_3)}{c_3(c_1 + c_2)}}.$$