

1. Oldjuk meg a következő egyenleteket:

$$a) \frac{x^3 - 4x}{2 - x} = 0; \quad b) \sqrt{\frac{x^3 - 4x}{2 - x}} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad c) \lg \frac{x^3 - 4x}{2 - x} = 0.$$

Megoldás. a) A nevező miatt: $x \neq 2$. A számlálót szorzattá bontjuk: $x(x - 2)(x + 2)$. A megoldások: $x_1 = -2$ vagy $x_2 = 0$.

b) A nevező miatt: $x \neq 2$, a négyzetgyök miatt: $\frac{x^3 - 4x}{2 - x} \geq 0$, ami az egyszerűsítés után: $-x(x + 2) \geq 0$, a feladat értelmezési tartománya: $x \in [-2; 0]$. A négyzetgyök alatt elvégezzük az egyszerűsítést, négyzetre emelünk, majd 0-ra rendezzük az egyenletet:

$$0 = x^2 + 2x + \frac{3}{4}.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek két valós gyöke van: $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$. Mindkettő megoldása az eredeti egyenletnek is.

c) A nevező miatt: $x \neq 2$, a logaritmus miatt: $\frac{x^3 - 4x}{2 - x} > 0$, ami az egyszerűsítés után: $-x(x + 2) > 0$, a feladat értelmezési tartománya: $x \in]-2; 0[$. Elvégezzük az egyszerűsítést, majd a logaritmus definíciója szerint kapjuk a következő egyenletet: $-x^2 - 2x = 10^0$, azaz $0 = x^2 + 2x + 1$. Az egyenlet egyedüli megoldása: $x = -1$.

2. Igazoljuk, hogy ha $a + 1$ osztható 6-tal, akkor n minden egész értékére $n(an^2 + 1)$ is osztható 6-tal.

Megoldás. Ha az $a + 1$ osztható 6-tal, akkor a felírható $6k - 1$ alakban ($k \in \mathbb{Z}$). Ekkor $n(an^2 + 1) = n[(6k - 1)n^2 + 1] = 6kn^3 - (n - 1)n(n + 1)$. Az első tag 6-nak többszöröse, ezért osztható 6-tal. A második tag három egymást követő egész szám szorzata, így az is osztható 6-tal.

3. Az 5 cm sugarú körbe írt AB húr egyenlő a körbe írható szabályos nyolcszög, a BC húr pedig a körbe írható szabályos hatszög oldalával. Mekkora az AC szakasz?

Megoldás. Jelöljük O -val a kör középpontját. I. eset: $\angle OBA = 67,5^\circ$, $\angle OBC = 60^\circ$, és ezek összege: $\angle ABC = 127,5^\circ$. Az OAB háromszögből koszinusztétellel meghatározzuk az AB hosszát:

$$AB = \sqrt{50 - 25\sqrt{2}} \approx 3,8268.$$

Az ABC háromszögből koszinusztétellel meghatározzuk az AC hosszát:

$$AC^2 = 14,6444 + 25 - 2 \cdot 3,8268 \cdot 5 \cdot \cos 127,5^\circ \approx 62,94, \quad AC \approx 7,9 \text{ (cm)}.$$

II. eset: $\angle OBA = 67,5^\circ$, $\angle OBC = 60^\circ$, és ezek különbsége: $\angle ABC = 7,5^\circ$. Az OAB háromszögből koszinusztétellel most is $AB \approx 3,8268$. Az ABC háromszögből koszinusztétellel meghatározzuk az AC hosszát: $AC \approx 1,3$ (cm).

Az AC hosszának lehetséges értékei: 7,9 cm vagy 1,3 cm.

4. Az a paraméter mely értékeire van az

$$a^2(x - 1) = 4(ax - x - 1)$$

egyenletnek egész gyöke?

Megoldás. Az egyenlet $(a - 2)^2 \cdot x = a^2 - 4$ alakúra rendezhető.

Ha $a = 2$, akkor a $0 \cdot x = 0$ egyenletet kapjuk, amelynek minden valós szám megoldása, ekkor van az egyenletnek egész gyöke.

Ha $a \neq 2$, akkor

$$x = \frac{(a - 2)(a + 2)}{(a - 2)^2} = \frac{a + 2}{a - 2} = 1 + \frac{4}{a - 2},$$

ez akkor egész, ha $a - 2$ osztója a 4-nek. Ekkor a lehetséges értékei: $-2; 0; 1; 3; 4; 6$, összesen hét megfelelő a értéket kaptunk: $\{-2; 0; 1; 2; 3; 4; 6\}$.

5. A 13 egység területű ABC háromszög két csúcsa: $A(3; -1)$ és $B(-1; 5)$. Határozzuk meg a C csúcs koordinátáit úgy, hogy a háromszög kerülete minimális legyen.

Megoldás. Az ABC háromszög c oldalának hossza a megadott koordináták segítségével kiszámítható: $c = AB = 2\sqrt{13}$. Mivel a háromszög területe 13, azért $m_c = \sqrt{13}$. Az AB szakaszt az $F(1; 2)$ felezőpontja körül 90° -kal elforgatva kapjuk a KL szakaszt: $K(-2; 0)$, $L(4; 4)$.

Az AB egyenessel párhuzamos, K -ra illeszkedő f_1 , illetve L -re illeszkedő f_2 egyeneseken van a keresett háromszög C csúcsa (hiszen $FL = FK = \sqrt{13}$). Az A pont tengelyes tükörképét f_1 -re jelölje A' . $AC + CB = A'C + CB$, ami

akkor minimális, ha $A'B$ és f_1 metszéspontja a C csúcs. Az f_2 -vel hasonlóan járhatunk el. Az így kapott metszéspontok éppen K , illetve L .

A C lehetséges koordinátái: $(-2; 0)$ vagy $(4; 4)$.

6. Egy 60 cm kerületű téglalap két szomszédos oldalára, mint átmérőre kifelé félköröket rajzolunk. Mekkora a téglalap oldalhosszúságait, hogy a kapott síkidom

- kerülete minimális legyen;
- területe maximális legyen?

Megoldás. A téglalap egyik oldalának a hosszát jelölje x , ekkor a másik oldal $30 - x$.

a) A síkidom kerülete x -szel kifejezve:

$$k(x) = 30 + \frac{x}{2} \cdot \pi + \frac{30-x}{2} \cdot \pi = 30 + 15\pi.$$

A kerület így nem függ x -től, állandó.

b) A síkidom területe x -szel kifejezve:

$$t(x) = x(30-x) + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 \pi + \frac{1}{2} \left(\frac{30-x}{2}\right)^2 \pi,$$

elvégezzük a kijelölt műveleteket:

$$t(x) = \left(\frac{\pi}{4} - 1\right) x^2 + \frac{60 - 15\pi}{2} x + \frac{225\pi}{2}.$$

Felhasználjuk, hogy ha a másodfokú függvény főegyütthatója negatív, akkor az együtthatók szokásos jelölésével az $x = -\frac{b}{2a}$ helyen maximuma van, ami most

$$x = -\frac{\frac{60-15\pi}{2}}{2\left(\frac{\pi}{4} - 1\right)} = \frac{15\pi - 60}{\pi - 4} = 15\text{-nek adódik.}$$

A terület tehát akkor maximális, ha a téglalap négyzet.

7. Egy háromszög α és β szögeire

$$(1 + \operatorname{ctg} \alpha)(1 + \operatorname{ctg} \beta) = 2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta.$$

Határozzuk meg a háromszög harmadik szögét.

Megoldás. Az egyenletet alakítsuk át:

$$\left(1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right) \left(1 + \frac{\cos \beta}{\sin \beta}\right) = 2 \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt $\sin \alpha \sin \beta$ -val:

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \beta + \cos \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta.$$

Végezzük el a beszorzást és rendezzük:

$$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

tehát $\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta)$.

Az egyenlőség mindkét oldalát oszthatjuk $\sin(\alpha + \beta)$ -vel (ami nem nulla, mert $0 < \alpha + \beta < 180^\circ$), ekkor $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = 1$. Ebből a két szög összege 45° , vagyis a harmadik szög 135° -os.

8. Az $ABCDE$ konvex ötszög A csúcsát kössük össze a BE átló, valamint a BC , CD és DE oldalak felezőpontjával. Az így kapott négy szakaszon az A csúctól távolabbi harmadoló pontok által meghatározott négyszög területe az eredeti ötszög területének az ötödével egyenlő. Hányadrésze az ABE háromszög területe az eredeti ötszög területének?

Megoldás. Az A csúctól indulva (a B felé) az oldalfelező pontok legyenek F_1 , F_2 , F_3 , F_4 és F_5 , a BE átló felezőpontja pedig F . A feladat szövege szerint a $BCDE$ négyszög F_2 , F_3 , F_4 és F oldalfelező pontjait kell összekötünk az A csúccsal, majd ezt a négyszöget kell az A -ból $\frac{2}{3}$ arányban kicsinyíteni. Ekkor kapjuk az $F_2'F_3'F_4'F'$ négyszöget. Megmutatható, hogy $F_2F_3F_4F$ négyszög (ami egyébként egy paralelogramma) területe fele a T területű, $BCDE$ négyszög területének. A hasonlóságból következik, hogy $F_2'F_3'F_4'F'$ területe $\frac{2}{9}T$. Legyen az ABE háromszög területe μT . Ekkor a feladat szövege szerint:

$$\frac{1}{5} = \frac{\frac{2}{9}T}{\mu T + T} = \frac{2}{9\mu + 9},$$

amiből $\mu = \frac{1}{9}$. Ez azt jelenti, hogy az ABE háromszög területe tizede az ötszög területének.