

Ágoston György (Miskolc, Szeged), Kellner Károly, Holczer Tamás és a többi, a holokauszt idején elpusztított barátom emlékére

1. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

$$\begin{aligned} a) \quad \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) &= \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right); & b) \quad \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right); \\ c) \quad \cos\left(3x - \frac{5\pi}{6}\right) &= \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right); & d) \quad \cos\left(\frac{5\pi}{6} - 3x\right) &= \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

2. Oldjuk meg a

$$\sqrt{x} + \sqrt{x - 4a + 4} = 2$$

egyenletet a valós számok halmazán, ahol a valós paraméter.

3. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójához tartozó magasság CD . Az ACD , illetve BCD háromszögekbe írható kör sugara $\varrho_1 = 3$, illetve $\varrho_2 = 4$. Számítsuk ki az ABC háromszögbe írható kör sugarát.

4. Az ABC háromszög B , illetve C csúcspontján áthaladó súlyvonal egyenlete $3x + 5y = 10$, illetve $3x - 2y = 3$. A háromszög egyik csúcspontja $(-3; 1)$. Számítsuk ki a másik két csúcspont koordinátáit.

5. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

$$\begin{aligned} a) \quad \lg^2(5 - x) + 2\lg^2(x + 1) &= 3(\lg(5 - x))(\lg(x + 1)), \\ b) \quad 3^{2x+1} + 3^{2-2\sqrt{x}} &= 4 \cdot 3^{1+x-\sqrt{x}}; & c) \quad 2\sin^4 x - 2\sin^2 x \cos^2 x + 4\cos^4 x &= 1. \end{aligned}$$

6. Mely n egész számokra lesz a

$$\frac{18nx + 36x + 12n + 6n^2}{3n^2x + 15nx + 18x + 6n + 5n^2 + n^3}$$

kifejezés értéke egész szám, ha x tetszőleges egész számot jelenthet?

7. Az $x^2 + (2p - 1)x + \frac{3}{2}p^2 - 5p + \frac{1}{4} = 0$ egyenlet valós gyökeinek négyzetösszege a valós p paraméter mely értékeinél a legkisebb, illetve a legnagyobb? Mennyi ez a legkisebb, illetve legnagyobb érték?

8. Az ABC háromszög AB oldalán levő K , a BC oldalán levő L pontokra $3AK = KB$, illetve $BL = LC$. Az AL és CK szakaszok metszéspontja Q .

- a) Hányadrésze az ABC háromszög területének az AQB , illetve a BQC háromszög területe?
- b) Milyen arányban osztja a Q pont az AL , illetve a CK szakaszt?