

I. kategória: Szakközépiskolák

Első (iskolai) forduló

1. Az $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai AB és CD . Az AB alap felezőpontja M , a CD alap felezőpontja N , az AD szár felezőpontja P . Határozza meg az $AMCP$ és a $BNDP$ négyszögek területének arányát!

2. Oldja meg a

$$[\sin x] \cdot \{\sin x\} = \sin x$$

egyenletet, ha x valós szám!

(Az r valós szám esetén $[r]$ – az r egész része – jelöli azt az egész számot, amelyre $r - 1 < [r] \leq r$. Az r valós szám esetén $\{r\}$ – az r törtrésze – jelöli azt a számot, amelyre $\{r\} = r - [r]$.)

3. A valós számok halmazán értelmezett $f(x)$ függvényről tudjuk, hogy

$$f(x) = a \cdot |x + 1| + b \cdot |x - 1| + c \cdot |x - 3|,$$

továbbá

$$f(-2) = 8; \quad f(2) = -2 \quad \text{és} \quad f(5) = 6.$$

a) Határozza meg az $f(x)$ függvényt!

b) Vázolja a függvény grafikonját a $[-2; 5]$ intervallumban!

c) Adja meg a függvény legkisebb értékét, és azt, hogy ezt a legkisebb értéket a függvény hol veszi fel!

4. Felveszünk egy 2003 mm hosszúságú AB szakaszt, majd felosztjuk 2003 egyenlő részre. Ezután az AB szakaszra az A pontjában 8 mm hosszúságú merőleges szakaszt állítunk. Ennek C végpontját összekötjük B -vel és az AB szakasz összes osztópontjával. Az így keletkezett összes háromszög közül melyek azok, amelyekben minden oldal hossza milliméterben mérve egész szám?

5. Határozza meg az összes olyan n pozitív egész számot, amelyre teljesül az, hogy ha egymás után leírjuk n^3 és n^4 tízes számrendszerbeli alakját, akkor a kapott tízjegyű számban mind a tíz számjegy pontosan egyszer fordul elő!

6. Egy előadáson 50 személy vett részt. Tudjuk, hogy bármely négy résztvevő között van olyan, aki a másik három személy mindegyikével találkozott már korábban. Bizonyítsa be, hogy bármely négy résztvevő között van olyan személy, aki korábban már mindegyik résztvevővel találkozott!

Második forduló

1. Melyek azok az n egész számok, amelyekre a

$$K = \frac{(n+1)^2}{n+20}$$

kifejezés értéke is egész szám?

2. Az $ABCD$ téglalap AB oldala, mint átmérő fölé írt félkör a CD oldalt az E és az F pontokban metszi. A félkörhöz az F pontban érintőt húzva, a kapott egyenes az AD oldalt a D -hez legközelebbi hatodolópontjában metszi.

Adja meg az $\frac{AB}{BC}$ arány pontos értékét!

3. Egy 4×4 -es táblázat minden sorába és minden oszlopába egy-egy számtani sorozat egymás utáni tagjait kell beírni, de előre be vannak írva a következő számok:

2			
			673
	850		
		1638	

Milyen szám kerül a jobb alsó sarokba?

¹ A II. és III. kategóriák feladatait novemberi számunkban közzétettük.

4. Egy háromszög oldalainak hossza a, b, c ; szögei rendre α, β, γ . Tudjuk, hogy $\alpha = 40^\circ$, valamint a háromszög T területére fennáll a következő összefüggés:

$$2 \cdot T = a \cdot b \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta}.$$

Mekkora a háromszög másik két szöge?

5. Bizonyítsa be, hogy minden 1-nél nagyobb, tetszőleges x, y, z valós számra teljesül, hogy:

$$\log_{xy} \sqrt{x \cdot y \cdot z^2} \cdot \log_{xz} \sqrt{x \cdot y^2 \cdot z} \cdot \log_{yz} \sqrt{x^2 \cdot y \cdot z} \geq 1.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

Harmadik (döntő) forduló

1. Oldja meg a következő egyenletrendszert, ha x, y, z valós számok!

$$\begin{aligned} x + yz &= 1, \\ y + zx &= 1, \\ z + xy &= 1. \end{aligned}$$

2. Bizonyítsa be, hogy ha x, y, z pozitív hegyesszögek, akkor teljesül a

$$\cos(x - y) \cdot \cos(y - z) \cdot \cos(z - x) \geq \sin 2x \cdot \sin 2y \cdot \sin 2z$$

egyenlőtlenség!

Mikor áll fenn egyenlőség?

3. Jelölje az ABC szabályos háromszögbe írt kört k , a k kör egy tetszőleges pontját (a kör és az oldalak érintési pontjai kivételével) pedig M . Az M ponton át a háromszög oldalaival párhuzamosan húzott egyenesek az ABC háromszöget három háromszögre és három paralelogrammára osztják.

Bizonyítsa be, hogy a kapott háromszögek területének összege megegyezik a keletkezett paralelogrammák területének összegével!