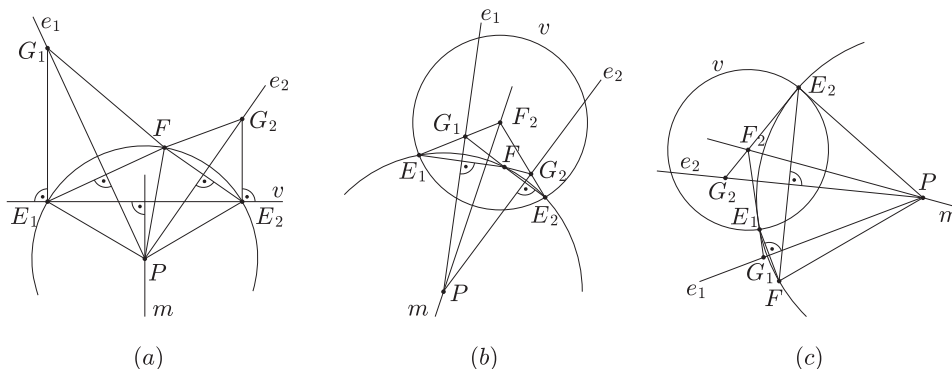


A kúpszeletek érintőinek érdekes tulajdonságáról szól a következő tétel.

11. tétel. *Ha egy külső P pontból érintőket húzunk a kúpszelethez, akkor a P -t az érintési pontokkal összekötő szakaszok a kúpszelet fókuszából vagy egyenlő, vagy pedig egymást 180° -ra kiegészítő szögekben látszanak. Az utóbbi eset csak akkor fordul elő, ha a kúpszelet hiperbola és a két érintő annak két különböző ágához tartozik.*

Bizonyítás. Használjuk a 10. tételben szereplő jelöléseket. A P -n átmenő érintők szerkesztéséből következik, hogy az E_1 és E_2 pontok, illetve az E_1G_1 és E_2G_2 egyenesek egymásnak a P -ből v -re állított m merőleges egyenesre vonatkozó tükörképei, F és E_i pedig egymásnak az e_i egyenesre vonatkozó tükörképei ($i = 1, 2$). Ezért a PE_iG_iF négyszögek deltoidok, tehát $G_iFP\angle = G_iE_iP\angle$. Így állításunk bizonyításához elég megmutatnunk, hogy vagy $G_1E_1P\angle = G_2E_2P\angle$, vagy pedig $G_1E_1P\angle = 180^\circ - G_2E_2P\angle$ teljesül.

Parabola esetén a G_i pontok v -nek ugyanazon az oldalán helyezkednek el. Ezért $G_1E_1P\angle = G_2E_2P\angle$, mert egymásnak m -re vonatkozó tükörképei (13.(a). ábra).



13. ábra

A többi kúpszelet esetén a G_i pont rajta van az F_2E_i egyenesen. Ezért $G_iE_iP\angle = F_2E_iP\angle$, ha E_i nincs rajta az F_2G_i szakaszon, és $G_iE_iP\angle = 180^\circ - F_2E_iP\angle$, ha E_i rajta van az F_2G_i szakaszon. Mivel $F_2E_1P\angle$ és $F_2E_2P\angle$ egymásnak m -re vonatkozó tükörképei, azért a tétel bizonyításához már csak azt kell észrevennünk, hogy az E_i pontok az F_2G_i szakaszokhoz képest csak akkor helyezkednek el különbözőképpen, ha $\mathcal{K}$ hiperbola, e_1 és e_2 pedig annak két különböző ágához tartozó érintő. $\square$

Következő állításunk hiperbolára csak némi megszorítással igaz, ezért a rövidség kedvéért a hiperbola esetét feladatnak hagyjuk.

12. következmény. *Legyen $\mathcal{K}$ egy hiperbolától különböző kúpszelet, e_1 és e_2 pedig két rögzített érintője. Ekkor $\mathcal{K}$ tetszőleges érintőjének e_1 és e_2 közé eső szakasza $\mathcal{K}$ fókuszából állandó szög alatt látszik.*

Bizonyítás. Ismét használjuk a 10. tétel jelöléseit, legyen továbbá a tetszőleges érintő e , a rajta lévő érintési pont G_3 , az $e \cap e_i$ pontot pedig jelölje M_i . A 11. tétel szerint $G_1FM_1\angle = G_3FM_1\angle$ és $G_3FM_2\angle = G_2FM_2\angle$. Vagyis

$$M_1FM_2\angle = M_1FG_3\angle + G_3FM_2\angle = \frac{1}{2}(G_1FG_3\angle + G_3FG_2\angle) = \frac{1}{2}G_1FG_2\angle,$$

ami viszont állandó, mert G_1 és G_2 rögzített pontok. $\square$

Ha a kúpszelet vezéralakzatát a fókuszról felére kicsinyítjük, akkor a kúpszelet *főalakzatát* kapjuk. Ez parabola esetén egyenes, a többi esetben kör. Ellipszis és hiperbola esetén a két lehetséges vezérkörből ugyanazt a főkört kapjuk, mert akár v -t kicsinyítjük felére F_2 -ből, akár v_1 -et F -ből, az eredmény mindkétszer az FF_2 felezőpontja köré írt a sugarú kör.

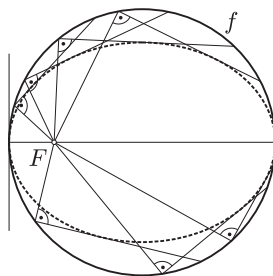
Ha a fókuszunk valamely g egyenesre való tükörképét a fókuszról felére kicsinyítjük, akkor az F -ből g -re állított merőleges talppontját kapjuk. Ezért a 9. következményből azonnal adódik az alábbi tétel.

13. tétel. *A kúpszelet fókuszából a kúpszelet tetszőleges érintőjére bocsájtott merőleges talppontja rajta van a főalakzaton.* $\square$

Ellipszis esetén a főkör egyik átmérője az ellipszis nagytengelye, s a főkörből merőleges tengelyes affinitással is származtatható az ellipszis (lásd pl. [1] 43. fejezet) (14. ábra).

¹ A cikk első része lapunk novemberi számában jelent meg (450. oldal).

² A T043556 és T043758 számú OTKA pályázatok támogatásával.



14. ábra

Parabola esetén a főegyenes a parabola tengelyén lévő C parabolapontban érinti a görbét. Ezt a pontot a parabola *csúcspontjának*, az itteni érintőt pedig a parabola *csúcserintőjének* nevezik.

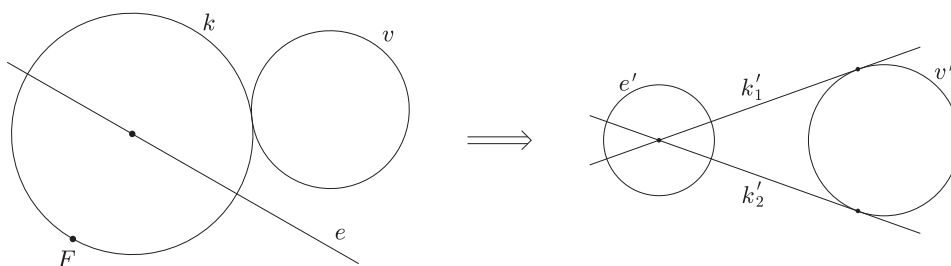
Hiperbola esetén a főkör az aszimptoták szerkesztéséhez nyújt segítséget. A fókuszokból a főkörhöz húzott érintők érintési pontjai az aszimptotákon vannak.

Egyenes és kúpszelet metszéspontja

Az ellipszis, parabola és hiperbola euklidészi értelemben nem szerkeszthetők meg. Azonban tetszőleges egyenes-sel vett metszéspontjukat meg tudjuk szerkeszteni. Ebben a fejezetben két módszert ismertetünk az F fókuszú, v vezéralakzatú $\mathcal{K}$ kúpszelet és az e egyenes közös pontjainak a szerkesztésére.

A 6. tétel szerint feladatunk azon k körök középpontjainak megszerkesztése, amelyek átmennek F -en, érintik v -t és merőlegesek e -re. Első módszerünkben az inverziót fogjuk alkalmazni, a másodikban pedig a pont körre vonatkozó hatványának tulajdonságait használjuk fel. Az első módszer alapján a szerkesztés leírása rövid, viszont feltételezzük, hogy az olvasó ismeri az inverzió legfontosabb tulajdonságait. Ezek megtalálhatók pl. [1] 39. fejezetében. A második módszerhez csak középiskolában tanult ismeretek szükségesek, cserében viszont ennek leírása hosszadalmasabb.

A feladat megoldása inverzióval. Alkalmazzunk egy olyan inverziót, melynek pólusa F . Ekkor a szerkesztendő k kör inverz képe valamely k' egyenes lesz, mert k átmeny az inverzió pólusán. Mivel k érinti v -t, azért k' érinti v képét, ami a v' kör (hiszen póluson át nem menő kör vagy egyenes inverz képe kör). Továbbá azt is tudjuk k' -ről, hogy merőleges e inverzére, ami az e' kör vagy egyenes (mert póluson átmenő egyenes inverze egyenes, póluson át nem menő egyenes inverze pedig kör) (15. ábra).



15. ábra

Ezeket felhasználva k' -t egyszerűen megszerkeszthetjük: a v' kör e' -re merőleges érintői lesznek a lehetséges k' egyenesek. Vagyis adott körhöz kell vagy adott ponton (e' középpontján, ha e' kör) átmenő, vagy adott egyenesre (e' -re, ha e' egyenes) merőleges érintőket szerkesztenünk. Az így kapott k' köröket visszainvertálva kapjuk a k köröket, amelyek középpontjai a keresett metszéspontok.

A megoldások száma 2, 1 vagy 0. Ha e' egyenes, akkor e átmeny F -en. Fókuszon átmenő egyenes két pontban metszi a kúpszeletet, kivéve a parabola tengelyével párhuzamos egyenest, amely csak egyben. Ha e' kör, akkor a megoldások száma attól függően 2, 0 vagy 1, hogy középpontja a v' körnek külső- vagy belső pontja, illetve azon rajta lévő pont.

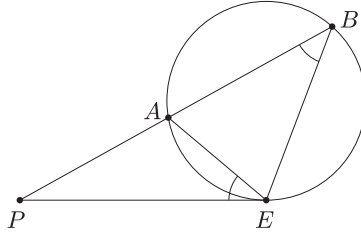
A feladat megoldása inverzió nélkül. Mivel az F ponton átmenő k kör középpontja e -n van, azért k átmeny F -nek e -re vonatkozó F' tükörképén is. (Ha F illeszkedik e -re, azaz $F \equiv F'$, akkor az FF' egyenes helyett az e -re F -ben állított merőlegest kell tekintenünk.) Feladatunkat ezért átfogalmazhatjuk: olyan kört kell szerkesztenünk, amely átmeny két adott ponton (F -en és F' -n) és érint egy adott kört vagy egyenest (v -t). A szerkesztések leírása megtalálható Horvay Katalin és Reiman István: *Geometriai feladatok gyűjteménye* I. kötetében ([2], 1332. és 1333. feladatok), a teljesség kedvéért azonban itt is közöljük azokat.

Tekintsük a feladatot megoldottnak. A v -n lévő érintési pontot jelöljük E -vel. Elegendő E -t megszerkesztenünk, mert E, F és F' ismeretében a három ponton átmenő kör szerkeszthető, annak középpontja pedig a keresett pontot adja.

Felhasználunk két lemmát, amelyek szintén megtalálhatók [2]-ben (1324. és 1351.f feladatok).

14. lemma. *Ha a P pontból egy körhöz húzott érintőszakasz PE , a P -n átmenő tetszőleges szelő pedig A -ban és B -ben metszi a kört, akkor $PE^2 = PA \cdot PB$.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy A a PB szakasz belső pontja. $\angle PEA = \angle PBE$, mert az EA ívhez tartozó kerületi szögek (16. ábra). A PAE és a PBE háromszögek tehát hasonlóak, mert ezen kívül közös a P -nél lévő szögük is. Így a két háromszögben a megfelelő oldalak aránya megegyezik, $\frac{PE}{PA} = \frac{PB}{PE}$, amiből adódik a bizonyítandó egyenlőség. $\square$

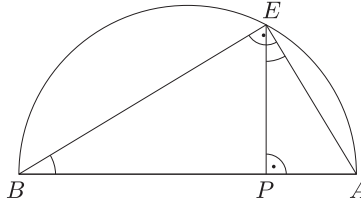


16. ábra

A következő lemma egyúttal eljárást is ad arra, hogy PA és PB ismeretében hogyan szerkesszük meg a $\sqrt{PA \cdot PB}$ hosszúságú szakaszt.

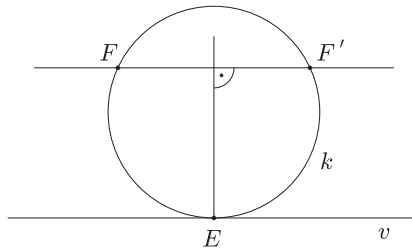
15. lemma. *Ha a P ponton átmenő tetszőleges egyenesre P -től egyik irányba a PA , másik irányba pedig a PB szakaszokat felmérjük, akkor az egyenesre P -ben állított merőleges és AB Thalész-körének E metszéspontjára $PE^2 = PA \cdot PB$.*

Bizonyítás. A PAE és a PBE háromszögek hasonlóak, mert P -nél lévő szögük derékszög, továbbá $\angle AEP = \angle BEP$, mert merőleges szárú hegyesszögek (17. ábra). Így a két háromszögben a megfelelő oldalak aránya megegyezik, $\frac{PE}{PA} = \frac{PB}{PE}$, amiből keresztbe szorzással adódik a bizonyítandó egyenlőség. $\square$



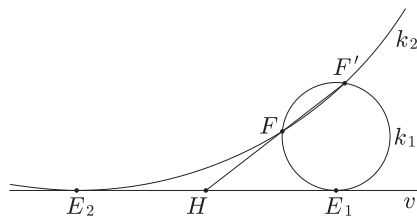
17. ábra

Térjünk vissza a szerkesztéshez. Ha v egyenes, akkor további két alesetet különböztetünk meg. Ha FF' párhuzamos v -vel, akkor E megegyezik FF' szakaszfelező merőlegesének és v -nek a metszéspontjával (18. ábra).



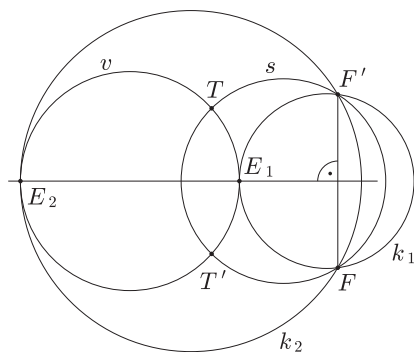
18. ábra

Ha FF' nem párhuzamos v -vel, akkor metszéspontjukat jelöljük H -val. Ekkor a 14. lemma szerint $HE^2 = HF \cdot HF'$, s így a 15. lemma alapján HF és HF' szakaszok ismeretében HE hossza megszerkeszthető. Ezután a H középpontú, HE sugarú kör és v metszéspontjai adják a lehetséges E pontokat (19. ábra).



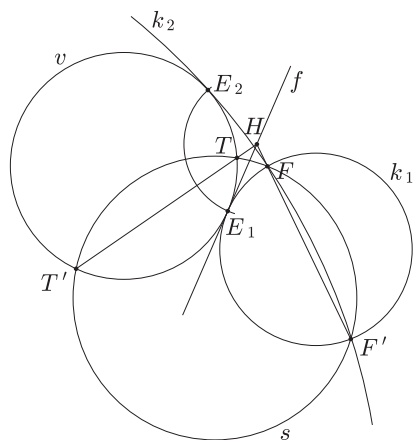
19. ábra

Ha v kör, akkor v -nek és k -nak E -ben közös az érintője. Legyen ez az f egyenes. Vegyünk fel v -n egy tetszőleges T pontot és szerkesszük meg azt az s segédkört, amelyik átmegy F -en, F' -n és T -n. Ha ez érinti v -t, akkor megkaptuk a keresett E pontot. Ha nem érinti, akkor legyen a v -vel alkotott másik metszéspontja T' . Ezután ismét két esetet különböztetünk meg. Ha FF' párhuzamos TT' -vel, akkor E megegyezik FF' szakaszfelező merőlegesének és v -nek a metszéspontjával, mert ekkor FF' és TT' szakaszfelező merőlegesei egybeesnek és ez az egyenes tartalmazza s -nek is és v -nek is a középpontját (20. ábra).



20. ábra

Ha FF' nem párhuzamos TT' -vel, akkor metszéspontjukat jelöljük H -val. Ekkor $HF \cdot HF' = HE^2 = HT \cdot HT'$, s így a HF és HF' szakaszok ismeretében HE hossza megszerkeszthető. Ezután a H középpontú, HE sugarú kör és v metszéspontjai adják a lehetséges E pontokat (21. ábra). (A H pont nem függ s választásától, TT' mindig ugyanott metszi FF' -t. Ezt itt nem bizonyítjuk, mert a szerkesztéshez nem szükséges. Az érdeklődő olvasó megtalálhatja a bizonyítást [2] 1331. feladatában.)



21. ábra

A megoldások számára ebből a szerkesztésből is 2, 1 vagy 0 adódik, hiszen a H középpontú HE sugarú körnek és v -nek 2, 1 vagy 0 közös pontja van.

Irodalom

- [1] Hajós György: *Bevezetés a geometriába*, 6. kiadás, Tankönyvkiadó (Budapest, 1979).
- [2] Horvay Katalin és Reiman István: *Geometriai feladatok gyűjteménye, I. kötet*, 4. kiadás, Tankönyvkiadó (Budapest, 1976).