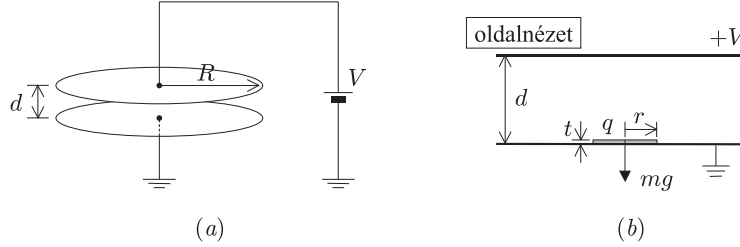


1. feladat. „Pingpong-ellenállás”

Egy síkkondenzátor két kör alakú, párhuzamos lemezből áll, mindkettő sugara R , a közöttük lévő távolság d , ahol $d \ll R$ (1.(a). ábra). A felső lemez egy állandó feszültségforráshoz csatlakozik, amelynek potenciálja V , míg az alsó lemez földelt. Az alsó lemez közepére egy vékony, kicsiny, m tömegű korongot helyezünk, melynek sugara r ($\ll R, d$), vastagsága t ($\ll r$), (1.(b). ábra).



1. ábra. (a): Állandó feszültségforráshoz csatlakozó síkkondenzátor vázlatos rajza. (b) A párhuzamos lemezek oldalnézete a kondenzátorba helyezett kisméretű koronggal

Tételezzük fel, hogy a lemezek közötti térrészben vákuum van, amit az ε_0 dielektromos állandó jellemez, továbbá a lemezek és a korong tökéletes vezetőanyagból készültek, illetve mindenféle elektrosztatikus él-effektust elhanyagolhatunk. Az egész áramkör induktivitásától és a relativisztikus hatásoktól szintén eltekinthetünk. A tükörtlítés hatásokat is elhanyagolhatjuk.

(a) (1,2 pont) Határozd meg az egymástól d távolságra lévő lemezek között ható F_p elektrosztatikus erőt, mielőtt a korongot a kettő közé helyeztük, amint ezt az 1.(a). ábra mutatja.

(b) (0,8 pont) Az 1.(b). ábrán lévő kicsiny korong q töltése a következő módon adható meg a felső lemez feszültségének függvényében: $q = \chi V$. Határozd meg a χ paramétert r , d és ε_0 függvényében!

(c) (0,5 pont) A síkkondenzátor lemezei a g homogén gravitációs térre merőlegesen helyezkednek el. A kezdetben nyugalomban lévő korong megemeléséhez egy bizonyos V_k küszöbérték fölé kell növelnünk az alkalmazott feszültséget. Fejezd ki V_k -t m , g , d és χ segítségével!

(d) (2,3 pont) Ha $V > V_k$, a korong föl-le fog mozogni a lemezek között. (Tételezzük fel, hogy a korong *mindenféle billegés nélkül*, kizárólag függőlegesen mozog.) A korong és a lemezek közötti ütközések részben rugalmatlanok, amit az η ütközési számmal jellemezhetünk: $\eta \equiv \frac{v_{\text{előtt}}}{v_{\text{után}}}$, ahol $v_{\text{előtt}}$ és $v_{\text{után}}$ rendre a korong sebessége közvetlenül az ütközés előtt és után. A lemezek végig rögzítettek, nem mozdulnak el. Hosszú idő után a korong „állandósult” mozgást fog végezni, a korong viselkedése ismétlődő mozgáshoz tart, melyben a korong v_s sebességét *közvetlenül* az alsó lemezzel történő ütközés után a következő módon fejezhetjük ki a V feszültséggel:

$$v_s = \sqrt{\alpha V^2 + \beta}.$$

Fejezd ki az α és β együtthatókat m , g , χ , d és η felhasználásával! Tételezd fel, hogy az ütközésekkor a korong teljes felülete egyenletesen és egyszerre érinti a lemezeket, és a teljes töltéscsere minden ütközéskor pillanatszerűen történik.

(e) (2,2 pont) Az állandósult állapot elérése után a kondenzátor lemezein keresztülfolyó áram I időátlagát így közelíthetjük: $I = \gamma V^2$, ha teljesül a $qV \gg mgd$ feltétel. Fejezd ki a γ együtthatót m , χ , d és η segítségével!

(f) (3 pont) Ha az alkalmazott V feszültséget (rendkívül lassan) csökkentjük, akkor elérünk egy olyan V_c kritikus feszültséget, amely alatt az áramkörben hirtelen megszűnik az áram. Határozd meg V_c értékét, és a hozzá tartozó I_c áramot m , g , χ , d és η segítségével! Készíts vázlatos grafikont (melyben összehasonlítsd V_c értékét a (c) alkérdésben tárgyalt V_k felemelkedési küszöbértékkel) az áram–feszültség karakterisztikáról, vagyis az I – V függvényről, miközben V először nulláról nagyjából $3V_k$ -ra növekszik, majd újra nullára csökken.

2. feladat. Felemelkedő ballon

Egy héliummal töltött gumiballon a levegőben magasra emelkedik, olyan régiókba, ahol a nyomás és a hőmérséklet a magasság növekedésével csökken. A következő kérdések tanulmányozásánál tételezzük fel, hogy a ballon a terheléstől függetlenül minden esetben gömbölyű marad, és hanyagoljuk el a terhelés térfogatát. Tegyük fel azt is, hogy a ballonban lévő héliumgáz hőmérséklete mindig azonos a környező levegő hőmérsékletével, és minden gázt kezeljünk ideális gázként. Az univerzális gázállandó $R = 8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$, és a hélium, illetve a levegő moláris tömege rendre $M_H = 4,00 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$, illetve $M_A = 28,9 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$. A nehézségi gyorsulás $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

A rész: (a) (1,5 pont) A környező levegő nyomása legyen P , hőmérséklete pedig T . A ballon „felületi feszültségének” következtében a ballon belsejében a nyomás nagyobb a külső nyomásnál. A ballon n mol héliumgázt tartalmaz, és a belsejében a nyomás $P + \Delta P$. Határozd meg a ballontra ható felhajtóerőt P és ΔP függvényében!

¹ A részpontszámokat azok kedvéért közöljük, akik – későbbi versenyekre készülve – az olimpiához hasonló feltételek mellett önállóan akarják megoldani a feladatokat. A „hivatalos” megoldást és a mérési feladatot a KöMaL novemberi számában ismertetjük.

A feladatok kidolgozására 5 óra állt rendelkezésre.

(b) (2 pont) Egy szép nyári napon Koreában a levegő T hőmérséklete a tengerszint feletti z magasság függvényében a $T(z) = T_0(1 - z/z_0)$ függvény szerint változott a $0 < z < 15$ km tartományban, ahol $z_0 = 49$ km és $T_0 = 303$ K. A tengerszinten a nyomás, illetve a sűrűség értéke $P_0 = 1,01 \cdot 10^5$ Pa, illetve $\varrho_0 = 1,16$ kg/m³ volt. Ebben a magasság tartományban a nyomás a

$$(2.1) \quad P(z) = P_0(1 - z/z_0)^\eta.$$

formulával adható meg. Fejezd ki az η kitevőt a z_0 , ϱ_0 , P_0 és g paraméterekkel, és határozd meg numerikus értékét két értékes számjeggyel pontossággal. A nehézségi gyorsulást tekintsd a magasságtól független konstansnak.

B rész: Ha egy gömb alakú, nyújtatlan állapotban r_0 sugarú gumiballont r ($> r_0$) sugarúra fújunk fel, a gumimegnyúlása miatt a ballon felülete extra rugalmas energiára tesz szert. Egy egyszerű elmélet szerint állandó T hőmérsékleten ennek a rugalmas energiának az értéke

$$(2.2) \quad U = 4\pi r_0^2 \kappa RT \left(2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3 \right),$$

ahol a $\lambda \equiv r/r_0$ (≥ 1) számértéket lineáris méretnövekedési aránynak nevezzük, a κ paraméter pedig egy mol/m² dimenziójú állandó.

(c) (2 pont) Fejezd ki ΔP -t a (2.2) egyenletben szereplő paraméterek függvényében, és ábrázold vázlatosan a ΔP nyomáskülönbséget a $\lambda = r/r_0$ mennyiség függvényében.

(d) (1,5 pont) A κ konstans meghatározható a ballon felfújásához szükséges gáz mennyiségéből. A feszítetlen falú ($\lambda = 1$) ballon $T_0 = 303$ K hőmérsékleten és $P_0 = 1,01 \cdot 10^5$ Pa nyomáson $n_0 = 12,5$ mol héliumot tartalmaz. Ugyanezen a T_0 hőmérsékleten és P_0 nyomáson a $\lambda = 1,5$ méretűre felfújt ballon összesen $n = 3,6 \cdot n_0 = 45$ mol héliumot tartalmaz. Fejezd ki n , n_0 és λ segítségével az $a = \kappa/\kappa_0$ képlettel definiált úgynevezett „ballonparamétert”, ahol $\kappa_0 \equiv \frac{r_0 P_0}{4RT_0}$, valamint határozd meg a értékét két értékes számjeggyel pontossággal.

C rész: A ballont tengerszinten a (d) pontban leírt módon készítjük elő (azaz $n = 3,6 \cdot n_0 = 45$ mol hélium gázzal $\lambda = 1,5$ méretűre fújuk fel $T_0 = 303$ K hőmérsékleten és $P_0 = 1$ atm = $1,01 \cdot 10^5$ Pa nyomáson). A szerkezet teljes tömege (figyelembe véve a gumiballont, a bezárt gázt és minden egyéb terhet) $M_T = 1,12$ kg. Ekkor a tengerszintről elengedjük a ballont.

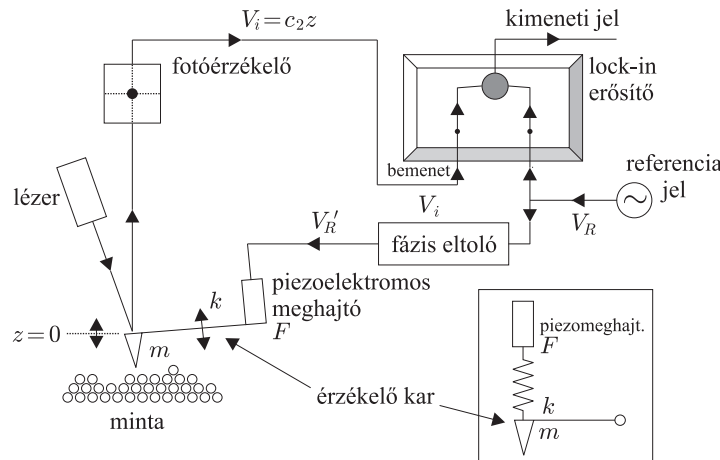
(e) (3 pont) Tegyük fel, hogy a ballon z_f magasságig emelkedik, és ott megáll. Ezen a szinten a felhajtóerő egyensúlyt tart a nehézségi erővel. Határozd meg z_f értékét, valamint ebben a magasságban a λ_f paramétert (lineáris méretnövekedési arányt). Válaszodat két értékes jegy pontossággal add meg. A ballon nem sodródik oldalirányban, és nem szökik el belőle a gáz.

3. feladat. Atomi erő mikroszkóp

Az atomi erő mikroszkóp (Atomic probe microscope, APM) a nano-tudomány igen hatékony eszköze. Az APM érzékelő karjának elmozdulását egy fotóérzékelő detektálja, az érzékelő karról visszavert lézersugár segítségével, ahogyan a 2. ábrán látható. Az érzékelő kar csak függőleges irányban képes mozogni, és a kar z elmozdulása az idő (t) függvényében a következő differenciálegyenlettel írható le:

$$(3.1) \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + kz = F,$$

ahol m a kar tömege, $k = m\omega_0^2$ az érzékelő kart jellemző rugóállandó, b egy kicsiny csillapítási állandó, melyre teljesül, hogy $\omega_0 \gg (b/m) > 0$, és végül F a piezoelektromos meghajtó által keltett külső gerjesztő erő.



2. ábra. Az atomi erő mikroszkóp (APM) vázlatos rajza. Az ábra jobb alsó sarkában látható kinagyított rész a piezoelektromos meghajtó és az érzékelő kar közti csatolás egyszerűsített mechanikai modelljét mutatja

A rész

(a) (1,5 pont) Ha a gerjesztő erő $F = F_0 \sin \omega t$ alakú, akkor a (3.1) egyenlet $z(t)$ megoldása $z(t) = A \sin(\omega t - \phi)$ alakban írható, ahol $A > 0$ és $0 \leq \phi \leq \pi$. Fejezd ki az A amplitúdót valamint a ϕ fázist az F_0 , m , ω , ω_0 és b paraméter függvényében! Határozd meg az amplitúdót és a ϕ fázist az $\omega = \omega_0$ rezonanciafrekvencián!

(b) (1 pont) A 2. ábrán szereplő lock-in erősítőben létrejön a bemeneti jelnek és a $V_R = V_{R_0} \sin \omega t$ úgynevezett lock-in referencia jelnek a szorzata, és az erősítő kimenetén a szorzatnak *csak* az egyenáramú (DC) komponense jelenik meg. Tegyük föl, hogy a bemeneti jel $V_i = V_{i_0} \sin(\omega_i t - \phi_i)$ alakú. Az itt szereplő V_{R_0} , V_{i_0} , és ϕ_i mennyiségek mindegyike adott pozitív állandó. Határozd meg, hogy milyen ω (> 0) frekvencia mellett kapunk nem zérus kimenő jelet! Add meg a nem zérus, *egyenáramú (DC) kimenő jel* nagyságát leíró formulát ezen a frekvencián!

(c) (1,5 pont) A „fázistoló” egységen átjutó, eredetileg $V_R = V_{R_0} \sin \omega t$ alakú lock-in referencia jel alakját a fázistoló egység után a $V'_R = V_{R_0} \sin(\omega t + \pi/2)$ formula írja le. A V'_R feszültség hatására a piezoelektromos meghajtó az érzékelő kart $F = c_1 V'_R$ erővel gerjeszti. Ezután a fotoérzékelő az érzékelő kar z elmozdulását $V_i = c_2 z$ alakú feszültségjellel alakítja. A formulákban szereplő c_1 és c_2 mennyiségek állandók. Határozd meg a nem zérus, *egyenáramú (DC) kimenő jel* nagyságát leíró formulát az $\omega = \omega_0$ frekvencián!

(d) (2 pont) Az érzékelő kar tömegének kicsiny Δm megváltozása $\Delta \omega_0$ -al eltolja a rezonanciafrekvenciát. Ennek következtében az eredeti, rezonanciafrekvenciához tartozó ϕ fázis is $\Delta \phi$ -vel eltolódik. Határozd meg azt a Δm tömeg változást, melynek hatására $\Delta \phi = \pi/1800$ nagyságú fáziseltolódás jön létre! Tipikusan ilyen nagyságú a fázistolás-mérések pontossága. Az érzékelő kart jellemző fizikai paraméterek értéke a következő: $m = 1,0 \cdot 10^{-12}$ kg, $k = 1,0$ N/m és $(b/m) = 1,0 \cdot 10^3$ s $^{-1}$. Használd az $|x| \ll 1$ esetén érvényes $(1+x)^a \approx 1+ax$ és $\tan(\pi/2+x) \approx -1/x$ közelítő formulákat!

B rész

Mostantól kezdve azt az esetet vizsgáljuk, amikor az A részben tárgyalt gerjesztő erőn kívül még az 2. ábrán látható minta is hat valamilyen erővel az érzékelő karra.

(e) (1,5 pont) Annak ismeretében, hogy a minta által kifejtett $f(h)$ erő csak a minta felszíne és az érzékelő kar közti h távolságtól függ, meghatározható az érzékelő kar egyensúlyi helyzetének új h_0 értéke. A $h = h_0$ érték közelében az erő az $f(h) \approx f(h_0) + c_3(h-h_0)$ alakban írható fel, ahol c_3 állandó, nem függ h -től. Fejezd ki az új ω'_0 rezonanciafrekvenciát ω_0 , m és c_3 segítségével!

(f) (2,5 pont) A mintát a mikroszkópban vízszintesen mozgatva pásztázzuk a minta felszínét. Az érzékelő kar tője, melynek töltése $Q = 6e$, egy $q = e$ töltésű, a felszín alatt bizonyos mélységben csapdába került (térben lokalizált) elektron közelébe jut. A csapdázott elektron környékén pásztázva a felszínt, a rezonanciafrekvencia maximálisan észlelhető eltolódása $\Delta \omega_0$ ($= \omega'_0 - \omega_0$), ami jóval kisebb, mint ω_0 . Fejezd ki a csapdázott elektron és az érzékelő kar közötti d_0 távolságot maximális frekvencia eltolódás esetén az m , q , Q , ω_0 , $\Delta \omega_0$ mennyiségek és a k_e Coulomb állandó segítségével! Határozd meg d_0 számértékét nm-ben ($1 \text{ nm} = 1 \cdot 10^{-9} \text{ m}$) $\Delta \omega_0 = 20 \text{ s}^{-1}$ frekvencia eltolódás mellett!

Az érzékelő kar fizikai paraméterei: $m = 1,0 \cdot 10^{-12}$ kg és $k = 1,0$ N/m. Az érzékelő kar tőjében, valamint a minta felületén tekintsünk el a polarizációs effektusoktól. Fizikai állandók: $k_e = 1/4\pi\epsilon_0 = 9,0 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ és $e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.