

A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

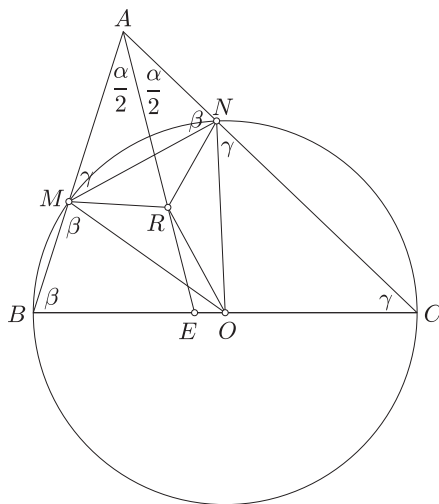
A szerkesztőség

1. Legyen ABC hegyesszögű háromszög, amiben $AB \neq AC$. A BC átmérőjű kör az AB , ill. AC oldalakat az M , ill. N pontokban metszi. Jelölje O a BC oldal középpontját. A BAC és MON szögek szögfelezői az R pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy a BMR és CNR háromszögek körülírt köreinek van olyan közös pontja, ami a BC oldalon fekszik.



Paulin Roland megoldása. Thálész tétele alapján $BMC \sphericalangle = BNC \sphericalangle = 90^\circ$, így M és N a magasságok talp-pontjai, melyek az ABC háromszög AB , illetve AC oldalainak belsejében vannak, mert a háromszög hegyesszögű.

$BMNC$ húrnégyszög, így $AMN \sphericalangle = \gamma$, $ANM \sphericalangle = \beta$. OBM és OCN egyenlő szárú háromszögekben $OMB \sphericalangle = \beta$, $ONC \sphericalangle = \gamma$, vagyis $OMN \sphericalangle = ONM \sphericalangle = \alpha$, $MON \sphericalangle = \pi - 2\alpha$.



Belátjuk, hogy a BAC és MON szögek szögfelezői – e és f – nem párhuzamosak, így R egyértelműen meghatározott. $e \parallel f$ esetén legyen $f \cap AC = D$. A DOC háromszögben D -nél $\frac{\alpha}{2}$, C -nél γ , O -nál

$$\begin{aligned} \angle CON + \frac{\angle NOM}{2} &= \\ &= (\pi - 2\gamma) + \frac{\pi - 2\alpha}{2} = \frac{3}{2}\pi - 2\gamma - \alpha \end{aligned}$$

szög van, így a szögösszeg

$$\pi = \frac{\alpha}{2} + \gamma + \frac{3}{2}\pi - 2\gamma - \alpha.$$

Rendezve:

$$\frac{\alpha}{2} + \gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha + 2\gamma = \pi = \alpha + \beta + \gamma \Rightarrow \gamma = \beta \Rightarrow AB = AC.$$

Ezt a feltétel kizárja, így $e \nparallel f$.

Legyen I az OMN háromszög beírt körének középpontja. $IMN \sphericalangle = INM \sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$ miatt $MIN \sphericalangle = \pi - \alpha$, ezért $AMIN$ húrnégyszög, így $IAN \sphericalangle = IMN \sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$. Tehát $I \in e$, ugyanakkor $I \in f$ is teljesül, ezért $R = I$.

Legyen $E = e \cap BC$. Ez a BC oldal egy belső pontja. Belátjuk, hogy a BMR és a CNR háromszögek körülírt köre is átmegy E -n. $REB \sphericalangle = AEB \sphericalangle = \pi - \beta - \frac{\alpha}{2}$, $REC \sphericalangle = AEC \sphericalangle = \pi - \gamma - \frac{\alpha}{2}$, míg $RMB \sphericalangle = \beta + \frac{\alpha}{2}$, $RNC \sphericalangle = \gamma + \frac{\alpha}{2}$, így $RMB \sphericalangle + REB \sphericalangle = RNC \sphericalangle + REC \sphericalangle = \pi$. Azaz $RMBE$ és $RNCE$ húrnégyszögek, így az RMB és az RNC háromszögek körülírt körének van közös pontja a BC oldalon.

2. Határozzuk meg az összes olyan valós együtthatós $P(x)$ polinomot, amely kielégíti a

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c)$$

egyenlőséget, valahányszor a, b, c olyan valós számok, amelyekre teljesül

$$ab + bc + ca = 0.$$



Hubai Tamás megoldása. Ha $a = b = c = 0$, akkor a feltétel teljesül, így $3P(0) = 2P(0)$, vagyis $P(0) = 0$. A feltétel nyilván akkor is teljesül, ha $b = c = 0$, és így $P(a) + P(0) + P(-a) = 2P(a)$, ahonnan $P(-a) = P(a)$ adódik minden valós a -ra. A $P(x)$ polinomfüggvény tehát páros, ami csak úgy lehetséges, ha minden páratlan fokú tagja nulla. (A $P(-a) = P(a)$ feltételt átrendezve ugyanis azt kapjuk, hogy $P(x) - P(-x)$ az azonosan nulla polinom, ebben a különbségben pedig éppen a $P(x)$ páratlan fokú tagjai szerepelnek.)

Legyen ezután $Q(x)$ az a polinom, amelyben $P(x)$ tagjai szerepelnek félakkora kitevővel, azaz amelyre $Q(x^2) = P(x)$ és nézzük meg, minek kell teljesülnie a $Q(x)$ polinomra. Az a, b, c közti összefüggést felhasználva csökkentsük a változók számát. Vezessük be az x és y változókat a következőképpen: legyen $a = x + y + c$, $b = y + c$. Ilyen x és y nyilván minden a, b és c hármashoz létezik, másrészt x és y bármely értékére van olyan a, b, c számhármas, amelyre teljesül a feltétel. Ez egész pontosan azt jelenti, hogy az $a = x + y + c$, $b = y + c$, $ab + bc + ca = 0$ egyenletrendszernek létezik (a, b, c) megoldása. Behelyettesítve ugyanis az $(x + y + c)(y + c) + (y + c)c + c(x + y + c) = 0$ egyenletet kapjuk, ami rendezés után a c -ben másodfokú:

$$3c^2 + (2x + 4y)c + (xy + y^2) = 0,$$

a diszkriminánsa, $4x^2 + 4xy + 4y^2 = 2(x^2 + y^2 + (x + y)^2)$ pedig nem negatív.

Fejezzük ki a feltételben szereplő mennyiségeket az új változók, x és y segítségével: $a - b = x$, $b - c = y$, $c - a = -x - y$, illetve

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca =$$

(felhasználva, hogy a feltétel szerint $ab + bc + ca = 0$ és tovább alakítva)

$$\begin{aligned} &= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2} = \\ &= \frac{x^2 + y^2 + (x+y)^2}{2} = x^2 + y^2 + xy. \end{aligned}$$

A P polinomra tehát, mint láttuk, akkor és csak akkor teljesülnek a feladat feltételei, ha bármely valós x, y számpárra fennáll, hogy

$$P(x) + P(y) + P(x+y) = 2P(\sqrt{x^2 + y^2 + xy}).$$

(Vegyük észre, hogy a bal oldal harmadik tagja eredetileg $P(c-a) = P(-x-y)$, ami most azért írható $P(x+y)$ alakban, mert a P páros függvény.)

A $Q(x)$ polinomra nézve ez azt jelenti, hogy

$$(1) \quad Q(x^2) + Q(y^2) + Q(x^2 + y^2 + 2xy) = 2Q(x^2 + y^2 + xy).$$

Az egyenlőségben x két polinomja áll, melyekben az együtthatók az y változó polinomjai. Tegyük fel, hogy a $Q(x)$ polinom n -edfokú és legyen az $n > 1$. A $Q(x)$ főegyütthatójával (1)-ben lehet osztani, föltehető tehát, hogy az 1. Mivel (1)-ben két polinom egyenlősége áll, a két oldalon az x változó minden előforduló hatványának egyenlő az együtthatója. Nekünk az x^{2n-2} tagot érdemes figyelni. Ha x^{n-1} együtthatója a $Q(x)$ -ben λ , akkor x^{2n-2} együtthatói (1) két oldalán:

$$\lambda + 0 + \left(\lambda + ny^2 + \binom{n}{2} \cdot 4y^2 \right) = 2 \left(\lambda + ny^2 + \binom{n}{2} \cdot y^2 \right).$$

Rendezés után innen $2 \cdot \binom{n}{2} = n$, azaz $n > 1$ miatt $n = 2$ adódik. Ez azt jelenti, hogy $n \leq 2$, a $Q(x)$ tehát legfeljebb másodfokú, a $P(x)$ így legfeljebb negyedfokú páros polinom, amelynek a konstans tagja nulla: $P(x) = \alpha \cdot x^4 + \beta \cdot x^2$.

Megmutatjuk, hogy ezekre a polinomokra teljesül a feladat feltétele. Ezt elég abban a két speciális esetben igazolni, ha $P(x) = x^4$, illetve $P(x) = x^2$. Könnyen ellenőrizhető ugyanis, hogy két megoldás összege, illetve egy megoldás számszorosa is megoldás, így pedig valamennyi adott alakú polinomot megkapjuk a fenti két speciális polinomból.

Ha $P(x) = x^4$, akkor

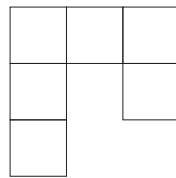
$$\begin{aligned} & 2P(a+b+c) - P(a-b) - P(b-c) - P(c-a) = \\ & = 2(a+b+c)^4 - (a-b)^4 - (b-c)^4 - (c-a)^4 = \\ & = 12(a^3b + b^3c + c^3a + ab^3 + bc^3 + ca^3) + 6(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + \\ & \quad + 24(a^2bc + b^2ac + c^2ab) = \\ & = 6(ab + bc + ca)^2 + 12(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca) = 0. \end{aligned}$$

Ha pedig $P(x) = x^2$, akkor

$$\begin{aligned} & 2P(a+b+c) - P(a-b) - P(b-c) - P(c-a) = \\ & = 2(a+b+c)^2 - (a-b)^2 - (b-c)^2 - (c-a)^2 = \\ & = 2(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) - (a^2 + b^2 - 2ab) - \\ & \quad - (b^2 + c^2 - 2bc) - (c^2 + a^2 - 2ca) = 6(ab + bc + ca) = 0. \end{aligned}$$

Ezzel a megoldást befejeztük, a keresett polinomok a $P(x) = \alpha \cdot x^4 + \beta \cdot x^2$ alakba írhatók, ahol α és β tetszőleges valós számok.

3. Nevezzük horognak az alábbi ábrán látható, hat egységnégyzetből álló alakzatot



valamint minden olyan alakzatot, amely ebből forgatásokkal és tükrözésekkel kapható.

Határozzuk meg az összes olyan $m \times n$ -es téglalapot, ami lefedhető horgokkal úgy, hogy

- a lefedés hézagmentes és átfedések nélküli,
- semelyik horognak nem nyúlik semelyik része sem a téglalapon kívülre.

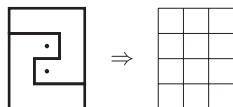


Rácz Béla András megoldása. Feltehetjük, hogy egy lefedett téglalap m, n oldalai egészek, illetve hogy minden horog éppen hat egységnégyzetet fed le, amelyek szerepelnek az egész téglalap egységnégyzetekre bontásában.¹



1. ábra

Tekintsünk egy horgot és a hozzá tartozó „középső” mezőt (1. ábra). Ez a mező a lefedni kívánt téglalap belsejében van, egy másik horognak tehát le kell fednie. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez csak kétféle módon lehetséges (2a., 2b. ábra).



2a. ábra

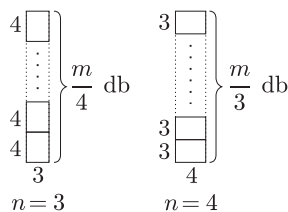


2b. ábra

Az egymás „közepét” kölcsönösen lefedő két horgot „összeragasztva” kétféle 12 területű csempét kapunk: a 3×4 -es téglalapot és ennek „ferde” formáját. A téglalap területe, $m \cdot n$ tehát osztható 12-vel, hiszen a lefedésben nyilván egész számú csempe vesz részt. Így $3 \mid m$ vagy $3 \mid n$. Az általánosság megszorítása nélkül föltehető, hogy $3 \mid m$. Vizsgáljuk most már azt, hogy m , illetve n a 2-nek milyen hatványával osztható.

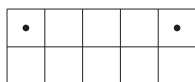
(I) $4 \mid m$, azaz $12 \mid m$.

Ha $n = 1$ vagy 2, akkor a lefedés nyilván lehetetlen, ha $n = 3$ vagy 4, akkor a téglalap már 3×4 -es csempékkel is lefedhető (3. ábra).



3. ábra

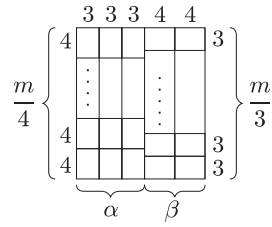
Ha $n = 5$, akkor a két „szomszédos” sarokmezőt két különböző csempe fedi csak le, ezek viszont nem férnek el átfedés nélkül (4. ábra).



4. ábra

¹ Ennek bizonyítását az értékelés során nem várták el a versenyzőktől; maga a bizonyítás nem nehéz, inkább technikai jellegű.

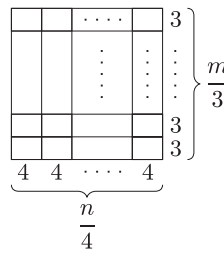
Ha $n \geq 6$, akkor $-12 \mid m$ esetén – az $n \times m$ -es téglalap lefedhető 3×4 -es csempékkel. Ha ugyanis $n = 3\alpha + 4\beta$, ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, akkor a megfelelő lefedés az 5. ábrán látható. Ha pedig $n \geq 6$, akkor létezik a megfelelő felbontás, hiszen $6 = 3 + 3$, $7 = 3 + 4$, $8 = 4 + 4$, végül ha n előáll ilyen alakban, akkor nyilván $n + 3$ is.



5. ábra

Vegyük észre, hogy lényegében újra igazoltuk a már tárgyalt $n = 3, 4$ eseteket.

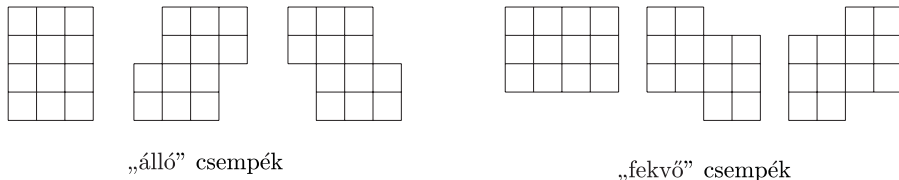
(II) Ha $4 \mid n$, akkor a lefedés nyilván megvalósítható 3×4 -es csempékkel (6. ábra).



6. ábra

(III) Ha sem (I) sem pedig (II) nem teljesül, azaz $4 \nmid m$ és $4 \nmid n$, akkor $4 \mid mn$ miatt m is és n is páros. Azt állítjuk, hogy ilyenkor a megfelelő lefedésben szükségképpen páros sok csempe vesz részt és így a téglalap területe osztható 8-cal. Ez viszont nem lehetséges, ha egyik oldal hossza sem osztható 4-gyel, így ilyenkor nincs megfelelő lefedés.

Színezzük ki a lefedett téglalap mezőit úgy, hogy minden negyedik oszlop fekete legyen, a többi pedig fehér. Ekkor a fekete mezők száma páros, hiszen minden oszlopban páros sok mező van. Csoportosítsuk a lefedésben részt vevő csempéket a 7. ábra szerint.



7. ábra

Minden „álló” csempe páros sok fekete mezőt fed le, egy-egy fekvő csempe pedig páratlan sokat (3-at), ezért páros sok „fekvő” csempe vesz részt a lefedésben. Ha pedig az oszlopok helyett minden negyedik sort színezzük feketére, akkor ugyanígy kapjuk, hogy az „álló” csempék száma páros.

Így tehát összesen is páros számú csempe van, a megfelelő lefedés ebben az esetben nem létezik.

Összefoglalva: a lehetséges m és n értékek a következők:

- $3 \mid m$ és $4 \mid n$; és szimmetrikusan
- $3 \mid n$ és $4 \mid m$;
- $12 \mid m$ és $n \geq 6$;
- $12 \mid n$ és $m \geq 6$.

Megjegyzések. 1. Az adott felsorolásban bizonyos $(m; n)$ számpárok többször is előfordulhatnak.

2. Látható, hogy a „ferde” csempéket nem tudjuk hasznosítani, ami egyáltalán lefedhető, ahhoz elegendőek a 3×4 -es csempék is.

4. Legyen $n \geq 3$ egész szám. Legyenek $t_1, t_2, \dots, t_n$ pozitív valós számok, amelyekre teljesül

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \dots + t_n) \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n} \right).$$

Mutassuk meg, hogy t_i, t_j, t_k egy háromszög oldalhosszai minden olyan i, j, k esetén, amikre $1 \leq i < j < k \leq n$ teljesül.



Egri Attila megoldása. A bizonyítás indirekt: Tegyük fel, hogy valamilyen a , b és c számokra t_a , t_b és t_c nem egy háromszög oldalai, tehát pl. $t_a \geq t_b + t_c$.

A feladat szerint:

$$\begin{aligned} n^2 + 1 &> (t_1 + t_2 + \dots + t_n) \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n} \right) = \\ &= n + \sum_{i < j} \left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} \right) = n + \sum_{\substack{i < j \\ i, j \notin \{a, b, c\}}} \left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} \right) + \frac{t_a}{t_b} + \frac{t_b}{t_a} + \frac{t_a}{t_c} + \frac{t_c}{t_a} + \frac{t_b}{t_c} + \frac{t_c}{t_b}. \end{aligned}$$

A jobb oldalon a szumma jelen belül használjuk fel, hogy $x \in \mathbb{R}^+$ -ra $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Így azt kapjuk, hogy

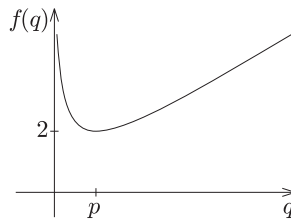
$$(1) \quad n^2 + 1 > n + 2 \cdot \left[\binom{n}{2} - 3 \right] + \frac{t_a}{t_b} + \frac{t_b}{t_a} + \frac{t_a}{t_c} + \frac{t_c}{t_a} + \frac{t_b}{t_c} + \frac{t_c}{t_b}.$$

Belátjuk, hogy az indirekt $t_a \geq t_b + t_c$ feltevésből a nyilvánvaló $T = \frac{t_a}{t_b} + \frac{t_b}{t_a} + \frac{t_a}{t_c} + \frac{t_c}{t_a} + \frac{t_b}{t_c} + \frac{t_c}{t_b} \geq 6$ becslésnél erősebb $T \geq 7$ is megkapható.

Ehhez használjuk fel, hogy ha p -t rögzítjük és q -t p felé közelítjük, akkor $\frac{p}{q} + \frac{q}{p}$ értéke csökken. Ez leolvasható az $f(q) = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}$ grafikonjáról (*ábra*), de közvetlen bizonyítás is nyomban adódik:

$$pqr(f(q) - f(r)) = p^2r + q^2r - r^2p - q^2p = (r - p)(q^2 - rp).$$

Ha pedig r elválasztja p -t és q -t, akkor a szorzat tényezői azonos előjelűek, így $0 \leq p, q, r$ miatt $f(q) \geq f(r)$ valóban.



Ezek után írunk T -ben t_a helyére $(t_b + t_c)$ -t. Mivel $t_a \geq t_b + t_c \geq t_b$ és $t_a \geq t_b + t_c \geq t_c$, azért a fentiek szerint ezzel T csökken.

$$\frac{t_a}{t_b} + \frac{t_b}{t_a} \geq \frac{t_b + t_c}{t_b} + \frac{t_c}{t_b + t_c} = 1 + \frac{t_c}{t_b} + \frac{t_b}{t_b + t_c}, \quad \text{illetve}$$

$$\frac{t_a}{t_c} + \frac{t_c}{t_a} \geq \frac{t_b + t_c}{t_c} + \frac{t_c}{t_b + t_c} = 1 + \frac{t_b}{t_c} + \frac{t_c}{t_b + t_c}.$$

Így $T \geq 2 + 2\left(\frac{t_c}{t_b} + \frac{t_b}{t_c}\right) + 1 \geq 7$, hiszen $\frac{t_c}{t_b} + \frac{t_b}{t_c} \geq 2$. Ezzel pedig (1) a következőképpen alakul:

$$n^2 + 1 > n + 2 \left[\binom{n}{2} - 3 \right] + 7 = n^2 + 1,$$

tehát $n^2 + 1 > n^2 + 1$. A kapott ellentmondás azt jelenti, hogy a feladat állítása igaz: minden $i < j < k$ -ra teljesül, hogy t_i , t_j és t_k egy háromszög oldalai.

5. Egy $ABCD$ konvex négyszögben a BD átló nem szögfelezője sem az $ABC\angle$, sem a $CDA\angle$ szögnek. A P pont az $ABCD$ négyszög belsejében fekszik, és teljesül rá

$$PBC\angle = DBA\angle \quad \text{és} \quad PDC\angle = BDA\angle.$$

Bizonyítsuk be, hogy $ABCD$ akkor és csak akkor húrnégyszög, ha $AP = CP$.

Kocsis Albert Tihamér megoldása. Először azt látjuk be, hogy ha $ABCD$ húrnégyszög, akkor $PA = PC$. Legyen BP és a kör metszéspontja D' , DP és a kör metszéspontja pedig B' (1. ábra).



Pach Péter Pál megoldása. Ha $20 \mid n$, akkor az n utolsó jegye 0 és $4 \mid n$ miatt az utolsó előtti jegy páros, így ekkor az n -nek nincsen alternáló többszöröse. A továbbiakban több lépésben igazoljuk, hogy a $20 \nmid n$ feltétel elégséges, ebben az esetben létezik olyan alternáló szám, amelyik osztható n -nel.

a) Legyen először $n = 2^k$. Megmutatjuk, hogy létezik olyan alternáló számokból álló $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ sorozat, amelyben A_k -nak k jegye van ($k = 1, 2, \dots$), A_{k+1} az A_k „folytatása”, tehát első jegyét elhagyva A_k -t kapjuk, $2^k \mid A_k$, továbbá $2^{k+1} \mid A_k$ pontosan akkor teljesül, ha k páros. Az A_k sorozatot teljes indukcióval állítjuk elő: $k = 1$, illetve $k = 2$ esetén $A_1 = 2$ és $A_2 = 32$ megfelelő.

Legyen $k \geq 2$ páros és tegyük fel, hogy az A_k számot már megadtuk a feltételeknek megfelelően, tehát A_k k -jegyű alternáló szám és osztható 2^{k+1} -nel. Mivel k páros, A_k első jegye páratlan. Így akár 2-est, akár 4-est írunk a szám elejére, $(k+1)$ -jegyű alternáló számot kapunk és $2^{k+1} \mid 2 \cdot 10^k$, illetve $2^{k+1} \mid A_k$ miatt mindkét esetben 2^{k+1} többszörösét kapjuk. Mivel $k+1$ páratlan, meg kell még mutatnunk, hogy $2 \cdot 10^k + A_k$ és $4 \cdot 10^k + A_k$ valamelyike nem osztható 2^{k+2} -nel. Ez nyilvánvaló, ellenkező esetben ugyanis a különbségük, $2 \cdot 10^k = 2^{k+1} \cdot 5^k$ is osztható volna 2^{k+2} -nel. Így ha k páros, akkor létezik a megfelelő A_{k+1} .

Legyen most a k páratlan. Ekkor A_k első jegye páros, így 1-et, illetve 3-at írva a szám elejére $(k+1)$ -jegyű alternáló számot kapunk. A konstrukció szerint $2^k \mid A_k$ és $2^{k+1} \nmid A_k$, így $A_k \equiv 2^k \pmod{2^{k+1}}$, továbbá nyilván $1 \cdot 10^k \equiv 3 \cdot 10^k \equiv 2^k \pmod{2^{k+1}}$. A megfelelő kongruenciákat összeadva kapjuk, hogy mindkét így adódó szám osztható 2^{k+1} -nel. Mivel a különbségükben, $2 \cdot 10^k = 2^{k+1} \cdot 5^k$ -ban is $k+1$ a 2 kitevője, azért legalább az egyikük még 2^{k+2} -nel is osztható. Így az $A_{k+1} = 10^k + A_k$ vagy $A_{k+1} = 3 \cdot 10^k + A_k$ választás megfelelő.

b) Ha $n = 5^k$, akkor ismét indukcióval megmutatjuk, hogy az n -nek van legfeljebb k -jegyű B_k alternáló többszöröse. (B_k legelső jegye lehet 0 is.)

Ha $k = 1$, akkor $B_1 = 5$ megfelelő. Legyen $k \geq 1$ és a B_k olyan, legfeljebb k -jegyű alternáló szám, amelyre $B_k \equiv 0 \pmod{5^k}$. Ekkor valamilyen $i \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ számra $B_k \equiv i \cdot 5^k \pmod{5^{k+1}}$. Ha B_k elejére egy újabb x számjegyet akarunk betoldani, akkor az oszthatósághoz

$$x \cdot 10^k + B_k \equiv 0 \pmod{5^{k+1}}, \text{ azaz } x \cdot 10^k + i \cdot 5^k = 5^k(x \cdot 2^k + i) \equiv 0 \pmod{5^{k+1}}$$

szükséges. Ez pontosan akkor teljesül, ha $x \cdot 2^k + i \equiv 0 \pmod{5}$. Mivel $(2^k; 5) = 1$, azért ennek a kongruenciának minden megoldása mod 5. Végül vegyük észre, hogy az x paritását megválaszthatjuk, hiszen a páros, illetve a páratlan számjegyek is egy-egy teljes maradérendszer alkotnak mod 5). Így a megfelelő választással $B_{k+1} = x \cdot 10^k + B_k$ is alternáló szám lesz, amely osztható 5^{k+1} -nel.

c) Ha $(10; n) = 1$, akkor a feladat állításán túlmenően azt igazoljuk, hogy az $x \equiv r \pmod{n}$ kongruenciának minden r maradék esetén létezik adott paritású alternáló megoldása.

Először azt mutatjuk meg, hogy ha $(10; n) = 1$, akkor van olyan teljes maradérendszer mod n , amelynek az elemei csak a 2 és a 0 számjegyeket tartalmazzák.

Az Euler–Fermat-tétel szerint ugyanis $10^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, így ha $k_1, k_2, \dots, k_r$ különböző pozitív egészek, akkor

$$T_r = 10^{k_1 \varphi(n)} + 10^{k_2 \varphi(n)} + \dots + 10^{k_r \varphi(n)} \equiv \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_r \equiv r \pmod{n},$$

a T_r számokból tehát teljes maradérendszer készíthető mod n). Mivel $(2; n) = 1$, azért a $2T_r$ számok is teljes maradérendszer alkotnak mod n és rendelkeznek az előírt tulajdonsággal.

Tekintsünk most egy olyan $H = 1010 \dots 10$ alakú alternáló számot, amely a fenti $2T_r$ alakú számokból álló teljes maradérendszer minden eleménél több jegyből áll. Ekkor az $A + 2T_r$ alakú számok is teljes maradérendszer alkotnak mod n , másrészt maguk is alternálók, hiszen a H alternáló számhoz olyan „rövidebb” számokat adtunk, amelyek minden jegye páros és a jegyek kicsik, tehát nincs tízes átlépés. Ebben az alternáló teljes maradérendszerben minden szám páros.

Ha most a

$$10H + 1 = \underbrace{1010 \dots 101}_H$$

páratlan alternáló számhoz adjuk hozzá a teljes maradékrendszer $2T_r$ elemeit, akkor alternáló páratlan számokból álló teljes maradékrendszert kapunk (mod n).

Ebből következik, hogy ha $(10; n) = 1$, akkor n -nek van alternáló többszöröse, az erősebb állításra a későbbiekben lesz szükség.

d) Hátra van még az az eset, amikor n osztható 2-vel vagy 5-tel, de nem osztható 20-szal. Ha $n = 2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot n_1$, ahol $(n_1; 10) = 1$, akkor vagy $\alpha \leq 1$ és $\beta > 0$, vagy pedig $\alpha \geq 1$ és $\beta = 0$. Ha $\alpha \leq 1$ és $\beta > 0$, akkor *b)* szerint $5^{\beta-1}$ -nek létezik legfeljebb $(\beta - 1)$ -jegyű B alternáló többszöröse, amelynek utolsó jegye, 5, páratlan. Így $B_1 = 10B - \beta$ -jegyű alternáló szám és $\alpha \leq 1$ miatt $2^\alpha \cdot 5^\beta \mid B_1$.

Olyan C alternáló számot keresünk, amelyre $D_1 = C \cdot 10^\beta + B_1$ is alternáló és osztható n -nel. Mivel $2^\alpha \cdot 5^\beta \mid 10^\beta$, azért $2^\alpha \cdot 5^\beta \mid D_1$. Most $(10; n_1) = 1$, tehát *c)* szerint az $x \cdot 10^\beta + B_1 \equiv 0 \pmod{n_1}$ kongruenciának létezik adott paritású alternáló megoldása, így B_1 első jegyének paritásától függően olyan is, amelyre D_1 is alternáló. Miután most $(n_1; 2) = (n_1; 5) = 1$, azért $n = 2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot n_1 \mid D_1$.

Végül ha $\beta = 0$ és $\alpha \geq 1$, akkor ugyanígy okoskodhatunk. *a)* szerint van olyan α -jegyű A alternáló szám, amelyre $2^\alpha \mid A$, *c)* szerint pedig a $10^\alpha \cdot x + A \equiv 0 \pmod{n_1}$ kongruenciának van adott paritású alternáló megoldása. Ekkor $2^\alpha \mid 10^\alpha$, tehát $2^\alpha \mid 10^\alpha \cdot x + A$, $(2; n_1) = 1$ miatt $n = 2^\alpha \cdot n_1 \mid 10^\alpha \cdot x + A$ és x paritását az A első jegyével ellentétesnek választva $10^\alpha \cdot x + A$ is alternáló szám lesz.

Ezzel minden esetet megvizsgáltunk, a bizonyítást befejeztük.