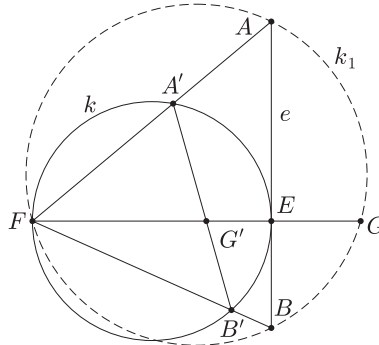


1. feladat. Az EF átmérőjű k kört az e egyenes az E pontban érinti. Tekintsük az e egyenes összes olyan A, B pontpárját, melyre az AB szakasz az E pontot tartalmazza és $AE \cdot EB$ egy rögzített állandó. Egy ilyen pontpár esetén legyen A' , illetve B' a k kör metszéspontja az AF , illetve BF szakasszal. Igazoljuk, hogy az $A'B'$ szakaszok egy ponton mennek keresztül.

I. megoldás. Legyen az ABF háromszög köré írt k_1 kör és az EF egyenes F -től különböző metszéspontja G . Az E pontnak k_1 körre vonatkozó hatványa $AE \cdot EB = FE \cdot EG$ állandó, ezért a G pont helyzete nem függ az A, B pontpár megválasztásától.



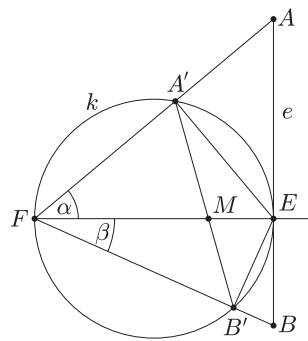
Tekintsük most azt az inverziót, amelynek alapköre az F középpontú, EF sugarú kör. Az e egyenes inverze a k kör, az A és B pontok inverze az A' , illetve a B' pont. A k_1 kör inverze az $A'B'$ egyenes; ezen belül is a G -t tartalmazó körív képe az $A'B'$ szakasz. Az $A'B'$ szakasz tehát mindig átmegy a G pont inverzén, G' -n, mely, mint azt láttuk, független az A és B pontok választásától. $\square$

Megjegyzések. 1. A fenti megoldás az inverzió tulajdonságaira épít, amely nem feltétlenül tananyag a középiskolában (lásd hátsó belső borítóoldalt). Ugyancsak inverziót használ megoldásában Balogh László és Maga Péter.

2. A fenti megoldásból könnyen látható, hogy ha $EF = 1$, akkor

$$FG' = \frac{1}{FG} = \frac{1}{1 + EG} = \frac{1}{1 + AE \cdot EB}.$$

A továbbiakban megadunk két, szokásosabb megoldást is.



II. megoldás. Legyen most EF és $A'B'$ metszéspontja M . Megmutatjuk, hogy M minden A, B pár esetén ugyanaz a pont; másképpen, az FM hossza állandó. Az FM hosszát az $FA'B'$ háromszög és $FA'EB'$ négyszög területének arányával fogjuk kifejezni:

$$\frac{FM}{EF} = \frac{t_{FA'B'}}{t_{FA'EB'}}.$$

Válasszuk az EF szakasz hosszát egységnek, legyen $\angle AFE = \alpha$ és $\angle BFE = \beta$. Az érintő tulajdonság és a Thalész-tétel szerint az FEA , FEB , illetve $FA'E$ és $FB'E$ háromszögek derékszögűek, így $AE = \tan \alpha$, $BE = \tan \beta$, $FA' = \cos \alpha$, $FB' = \cos \beta$, $A'E = \sin \alpha$ és $B'E = \sin \beta$. A keresett területek tehát:

$$\begin{aligned} t_{FA'B'} &= \frac{1}{2} FA' \cdot FB' \sin(\alpha + \beta) = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin(\alpha + \beta)}{2} \\ t_{FA'EB'} &= t_{FA'E} + t_{FB'E} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta}{2} = \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{4} = \\ &= \frac{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}{2}. \end{aligned}$$

Végül

$$\begin{aligned} FM &= \frac{FM}{EF} = \frac{t_{FA'B'}}{t_{FA'EB'}} = \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \\ &= \frac{1}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{1}{1 + EA \cdot EB} \end{aligned}$$

Az FM szakasz hossza tehát állandó. $\square$

III. megoldásvázlat (Kis Gergely megoldása). Válasszuk k középpontját az origónak, sugarát egységnyiinek, legyenek továbbá az A és B pontok koordinátái rendre $(1; a)$, ill. $(1; b)$. Az AF és BF egyenesek, ill. a k kör egyenletei rendre

$$\frac{ax}{2} + \frac{a}{2} = y$$

$$\frac{bx}{2} + \frac{b}{2} = y$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

A megfelelő egyenletpárok megoldásából a metszéspontokra

$$A' = \left(\frac{8}{a^2 + 4} - 1; \frac{4a}{a^2 + 4} \right) \quad \text{és} \quad B' = \left(\frac{8}{b^2 + 4} - 1; \frac{4b}{b^2 + 4} \right)$$

adódik. Az $A'B'$ egyenes egyenlete innen

$$\frac{4 + ab}{2(a + b)} \left(x + 1 - \frac{8}{a^2 + 4} \right) + \frac{4a}{a^2 + 4} = y.$$

Az $A'B'$ egyenes x tengellyel való metszéspontjának x koordinátája a fenti egyenletből $y = 0$ helyettesítéssel

$$x_0 = \frac{4 + ab}{4 - ab}.$$

Ez a mennyiség állandó, hiszen ab állandó. Ez azt jelenti, hogy az $A'B'$ egyenesek mindegyike átmegy az $(x_0; 0)$ ponton. $\square$

2. feladat. Egy G gráf k -színezése a G csúcsainak megszínezése k lehetséges szín felhasználásával úgy, hogy G bármely élének végpontjai különböző színűek legyenek. Azt mondjuk, hogy G egyértelműen k -színezhető, ha egyrészt G -nek létezik k -színezése, másrészt nem léteznek G -nek olyan u és v csúcsai, melyek G valamely k -színezésében azonos színűek, míg G egy másik k -színezésében egymástól különböző színt kapnak.

Bizonyítsuk be, hogy ha az n pontú G gráf egyértelműen 3-színezhető és $n \geq 3$, akkor G -nek legalább $2n - 3$ éle van.

Megoldás. Rögzítsük G egy 3-színezését, melyben az egyes színekre színezett csúcsok száma (azaz a színosztályok mérete) n_1 , n_2 , illetve n_3 . Világos, hogy $n_1 + n_2 + n_3 = n$.

Tegyük fel, hogy két színosztály (mondjuk a piros és a zöld) nem feszít G -ben összefüggő gráfot, azaz a piros és zöld csúcsok között futó élek alkotta részgráfnak legalább két komponense van. Amennyiben e komponensek valamelyikén a színeket felcseréljük (vagyis ezen a komponensen belül a korábban zöld csúcsok pirosak lesznek, a pirosak pedig zöldek), úgy továbbra is igaz marad, hogy G bármely élének végpontjai különböző színűek. A cserével tehát G egy olyan 3-színezéséhez jutunk, melynek színosztályai másképpen osztják három csoportra G csúcsait, mint az eredeti színezés színosztályai. Ezért az új 3-színezésben vagy két, korábban azonos színű pont különböző színt kapott, vagy két, korábban különböző színű pont azonos színű lett, esetleg mindkét változásra sor kerülhetett. Ez ellentmond annak, hogy G egyértelműen színezhető 3 színnel, vagyis G bármely két színosztálya összefüggő gráfot feszít.

Ismert, hogy egy összefüggő gráf élszáma legfeljebb 1-gyel kevesebb, mint pontjainak száma, ezért az első két színosztály legalább $n_1 + n_2 - 1$, a második és harmadik színosztály legalább $n_2 + n_3 - 1$, míg az első és harmadik színosztály legalább $n_1 + n_3 - 1$ különböző élt tartalmaz. Az említett élek egymástól is különböznek, ezért G élszámára az $(n_1 + n_2 - 1) + (n_2 + n_3 - 1) + (n_3 + n_1 - 1) = 2n - 3$ alsó becslést kapjuk. $\square$

Megjegyzések. 1. Többen próbálták a feladatot teljes indukcióval megoldani: az állítás 3-pontú gráfokra világos, tegyük fel, hogy a legfeljebb $(n - 1)$ -pontú gráfokra már bizonyítottuk a becslést. Ha az n -pontú, egyértelműen 3-színezhető G gráfnak minden csúcsa legalább 4-edfokú, akkor élszáma legalább $2n$, így az állítás igaz. Ha van G -nek másodfokú csúcsa, akkor annak törlésével (mint az könnyen látható) egy egyértelműen 3-színezhető gráf keletkezik, melyre igaz az indukciós feltevés: legalább $2(n - 1) - 3 = 2n - 5$ éle van, ezért G élszáma nem kevesebb, mint $2n - 5 + 2 = 2n - 3$. Az elintézetlen eset az, amikor G -ben a minimális fokszám 3. Sajnos, ha G egy harmadfokú v csúcsát elhagyjuk, a maradék $G - v$ gráf nem lesz feltétlenül egyértelműen 3-színezhető: elképzelhető ugyanis $G - v$ -nek

olyan 3-színezése, melyben v szomszédai különböző színeket kapnak. Ha ezt követően pl. összehúzzuk v két azonos színű szomszédját, akkor a kapott gráf már egyértelműen 3-színezhető, azonban csupán 3-mal kevesebb éle van, mint G -nek. Az indukciós bizonyításhoz pedig legalább 4-gyel kevesebb élre volna szükség.

A bizottság nem ismer a fenti gondolatmenetet teljes indukciós bizonyítássá kiegészítő érvelést.

2. Többen igazolták, hogy a feladatban adott korlát elérhető. Világos, hogy a 3-pontú teljes gráf egyértelműen 3-színezhető, és $(2n-3)$ éle van. Az is könnyen látszik, hogy ha egy egyértelműen 3-színezhető G gráfhoz hozzáveszünk egy új pontot, melyet G két különböző színű pontjával kötünk össze, akkor újabb egyértelműen 3-színezhető gráfot kapunk, melyre a becslés pontos lesz, ha már G -re is az volt.

3. A feladat megoldása értelemszerű módosításokkal kiterjeszthető egyértelműen k -sínezhető gráfok élszámának becslésére is, azaz megmutatható, hogy tetszőleges egyértelműen k -sínezhető gráfnak legalább $(k-1)(n-k) + \binom{k}{2}$ éle van. A 2. megjegyzés is kiterjeszthető: a k -pontú teljes gráf egyértelműen k -sínezhető, és egy egyértelműen k -sínezhető gráfhoz új pontot hozzávéve és $k-1$ különböző színű ponttal összekötve ismét egyértelműen k -sínezhető gráfot kapunk.

4. Akkor is alkalmazható a módszerünk, ha nem az egyértelműen k -sínezhető gráfok élszámát akarjuk megbecsülni, hanem csupán felső korlátunk van G k -sínezéseinek számára. A megoldás gondolatmenetével felső becslést kaphatunk két színosztály által feszített komponensek számára, innen pedig a két komponens által feszített élek száma alulról becsülhető.

3. feladat. Jelölje $(a; b)$ az a és b egész számok legnagyobb közös osztóját. Bizonyítsuk be, hogy véges sok kivételtől eltekintve minden pozitív egész n számra teljesül a

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i; j) > 4n^2$$

egyenlőtlenség.

I. megoldás. Vizsgáljuk meg, hogy egy rögzített d szám hányszor lép fel $(i; j)$ -ként a feladatbeli összegben! Világos, hogy ha $(i; j) = d$, akkor $\frac{i}{d}$ és $\frac{j}{d}$ relatív prímelek, továbbá mindkettő az $\left[1; \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right]$ intervallumba esik, ahol $[n]$ az n alsó egészrészét jelöli.

Másfelől, ha $i', j' \in \left[1; \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right]$ relatív prímelek, akkor $i := i' \cdot d$, ill. $j := j' \cdot d$ esetén $(i; j) = d$ és $i, j \in [1; n]$. A feladatbeli egyenlőtlenség bal oldalán álló mennyiséget $f(n)$ -nel jelölve, a fenti gondolatmenet formálisan az alábbi összeg átrendezése:

$$(1) \quad f(n) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i; j) = \sum_{d=1}^n \sum_{\substack{(i; j) = d, \\ 1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq n}} d = \sum_{d=1}^n \sum_{\substack{(i; j) = 1, \\ 1 \leq i \leq \frac{n}{d}, \\ 1 \leq j \leq \frac{n}{d}}} d = \sum_{d=1}^n d \cdot g\left(\frac{n}{d}\right),$$

ahol $g(x)$ az 1 és x közé eső számokból alkotható relatív prím számpárok száma. A továbbiakban $g(x)$ értékét fogjuk megbecsülni, pontosabban igazoljuk, hogy

$$(2) \quad g(x) \geq \frac{x^2}{100}.$$

Mivel az $(1; 1)$ számpár megfelelő, ezért $x \leq 10$ esetén (2) triviálisan teljesül. A becslés úgy adódik, hogy az összes számpárok számából minden d -re kivonjuk azon számpárok számát, melyeknek d közös osztója. Azaz,

$$\begin{aligned} g(x) &\geq [x]^2 - \left[\frac{x}{2}\right]^2 - \left[\frac{x}{3}\right]^2 - \left[\frac{x}{4}\right]^2 - \dots > \left(\frac{9x}{10}\right)^2 - \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^2}{3^2} - \frac{x^2}{4^2} - \dots > \\ &> x^2 \left(\frac{81}{100} - \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} \dots \right) \right) = \\ &= x^2 \left(\frac{81}{100} - \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \dots \right) \right) \geq x^2 \left(\frac{81}{100} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) > \frac{x^2}{100}. \end{aligned}$$

A becslést (1)-be helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$(3) \quad f(n) = \sum_{d=1}^n d \cdot g\left(\frac{n}{d}\right) \geq \sum_{d=1}^n d \cdot \frac{n^2}{100 \cdot d^2} = \frac{n^2}{100} \sum_{d=1}^n \frac{1}{d}$$

Ismert, hogy a harmonikus sor divergens, ezért valamely N -re $\sum_{d=1}^N \frac{1}{d} > 400$ teljesül (például $N = 2^{800}$ megfelel), így $n \geq N$ -re (3) alapján

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i; j) = f(n) \geq \frac{n^2}{100} \cdot 400 = 4n^2,$$

amint azt bizonyítanunk kellett. $\square$

Megjegyzések. 1. A bizonyításból látható, hogy a feladatbeli becslés jobb oldalán álló 4-es szorzó tetszőleges konstanssal helyettesíthető azon az áron, hogy megnő az a legnagyobb egész, melyre a feladatbeli egyenlőtlenség még nem teljesül.

2. Mélyebb számelméleti ismereteket felhasználva megmutatható, hogy a megoldásban szereplő $g(x)$ függvény aszimptotikusan $\frac{6}{\pi^2}x^2$, ahonnan a feladatban szereplő $f(n)$ összeg értéke aszimptotikusan $\frac{6}{\pi^2}x^2 \log x$ -nek adódik.

3. A legtöbb megoldó a fenténél kevésbé elemi, a prímek reciprokösszegének divergenciájára építő megoldást talált. Az alábbiakban vázoljuk ezt a gondolatmenetet.

II. megoldás. Az $(i; j)$ legnagyobb közös osztót az i, j számok közös prímosztóinak összegével becsüljük. Legyenek $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ mindazon prímek, melyek az i és j számokat egyaránt osztják. Mivel bármely szóban forgó prím legalább 2, ezért

$$(4) \quad \begin{aligned} (i; j) &\geq p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k \geq p_1 + p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k \geq \\ &\geq p_1 + p_2 + p_3 \cdot \dots \cdot p_k \geq \dots \geq p_1 + p_2 + \dots + p_k \end{aligned}$$

teljesül. Jól ismert, hogy a prímek reciprokösszege ∞ -hez tart, így létezik olyan N szám, melyre az 1 és N közti prímek reciprokösszege nagyobb, mint 6. Ha tehát $n \geq N$, akkor (4) alapján az I. megoldásban definiált $f(n)$ -t az alábbi módon becsülhetjük:

$$\begin{aligned} f(n) &\geq \sum_{p \text{ prím}} \sum_{p|(i;j)} p = \sum_{p \text{ prím}} p \cdot \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor^2 \geq \sum_{\substack{p \text{ prím} \\ p \leq n}} p \left(\frac{n}{p} - 1 \right)^2 = \\ &= \sum_{\substack{p \text{ prím} \\ p \leq n}} \left(\frac{n^2}{p} - 2n + p \right) > -2n^2 + n^2 \cdot \sum_{\substack{p \text{ prím} \\ p \leq n}} \frac{1}{p} \geq -2n^2 + n^2 \cdot \sum_{\substack{p \text{ prím} \\ p \leq N}} \frac{1}{p} \geq \\ &\geq -2n^2 + 6n^2 = 4n^2. \quad \square \end{aligned}$$