I. rész

1. *Határozzuk meg azon négyzet csúcspontjainak a koordinátáit, amelynek három csúcsa illeszkedik az $x^2-6x-5y+4=0$ egyenletű parabolára, és átlói párhuzamosak a koordináta-tengelyekkel.*

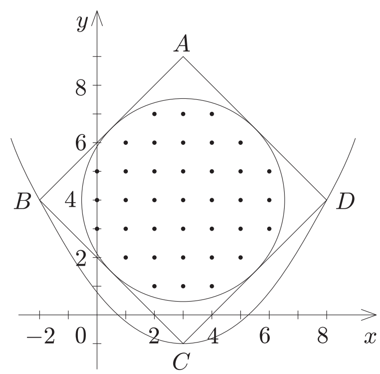
a) Mekkora a négyzetbe írt kör területe?

b) Hány rácspontja van a zárt körlapnak? (*11 pont*)

Megoldás. Az $x^2-6x-5y+4=0$ parabola egyenletét alakítsuk a következőképpen:

$$\frac{(x-3)^2}{5}=y+1.$$

Csúcspontja leolvasható: $C(3;-1)$. A négyzet oldalegyenese 45°-os szöget zár be az x tengellyel, és átmegy C-n, ezért egyenlete $y=x-4$. Második metszéspontja a parabolával $D(8;4)$, tehát $B(-2;4)$ és $A(3;9)$. A négyzet átlója 10 egység, így oldala $5\sqrt{2}$, ami a keresett kör átmérője. A négyzetbe írt kör területe $T=\frac{25\pi}{2}$. A kör egyenlete $(x-3)^2+(y-4)^2=\frac{25}{2}$.



Az $y=4$ és az $x=3$ egyeneseken a körben 13 rácspont van, egy negyedkörben még 6 újabb rácspont, tehát összesen 37 rácspont van a zárt körlapon. (Tulajdonképpen azt kell leszámolni, hányféleképpen adhat két egész szám négyzetösszege 12,5-nél kisebbet.)

2. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:*

$$1-x^2-x^4=4^{\sin^2 x}.$$ (*12 pont*)

Megoldás. Mivel $0\le\sin^2 x\le 1$, azért a jobb oldal értékkészlete $1\le 4^{\sin^2 x}\le 4$. A bal oldal értéke legfeljebb 1 lehet, és az is csak akkor, ha $x=0$. Ez az egyetlen megoldása az egyenletnek.

3. *Az alábbi táblázat a fogyasztói árindex alakulását mutatja néhány országban* 1995–1999 *között:*

Ország	**változás az előző évhez képest, %**				
	1995	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**
Ausztria	2,3	1,5	1,3	1	0,6
Franciaország	1,7	2	1,2	0,8	0,6
Lengyelország	27,8	19,9	14,8	11,6	7,3
Magyarország	**28,2**	**23,6**	**18,3**	**14,3**	**10**
Nagy-Britannia	3,4	2,4	3,2	3,4	1,6
Németország	1,8	1,4	1,9	1	0,6

a) Értelmezzük, mit jelent Ausztriánál az utolsó két oszlopban található 1 *és* 0,6 *szám.*

b) Ha valaki 1994*-ben* 34 000 *forintot az ágynemű közé rejtett, hány forintnak felel meg a vásárlóereje* 1999*-ben?*

c) Nagymami 200 000 *forintot akar diplomaajándékként az unokájának adni* 1999*-ben, amikor végez. Mennyi pénzt tett a sikeres felvételi vizsga hírére* 1994*-ben abba a bankba, amelyik – mint utóbb kiderült – pontosan a fogyasztói árindexszel megegyező kamatot adott* 1994 *és* 1999 *között?* (*14 pont*)

Megoldás. *a*) Azt jelenti, hogy a fogyasztói árak átlagosan az előző évinek 1,01-; illetve 1,006-szeresei lettek.

b) Az 1994-es forint 1995-ben már csak az eredeti összeg $\dfrac{1}{1+\frac{28,2}{100}}$-szorosát érte, és hasonló gondolatmenettel kiszámítható, hogy az 1994-ben elrejtett 34 000 Ft vásárlóértéke 1999-ben

$$34\,000 \cdot \frac{1}{1+\dfrac{28,2}{100}} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{23,6}{100}} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{18,3}{100}} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{14,3}{100}} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{10}{100}} = 14\,426$$

forint 1994-es vásárlóértékének felelt meg.

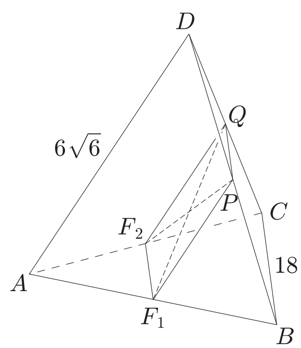
c) Nagymami ezresre kerekítve 85 000 forintot tett 1994-ben a bankba, számítás az előző módon.

4. *Az ABC szabályos háromszög alapú, D csúcsú gúla alapélei* 18 cm, *oldalélei* $6\sqrt{6}$ cm *hosszúak. Fektessünk az AD éllel párhuzamos síkot az AB és AC élek felezőpontjain át.*

a) *Számítsuk ki a síkmetszet területét.*

b) *Mekkora szöget zár be a metsző sík az alapsíkkal?* (*14 pont*)

Megoldás. Az AD éllel párhuzamos és az AB és AC élek felezőpontjain átmenő sík az ABD és ACD síkokat az AD-vel párhuzamos középvonalakban metszi. A metszetnégyszög paralelogramma, melynek átlói a szimmetria miatt egyenlők, ezért ez téglalap.



a) A téglalap területe $t = 9 \cdot 3\sqrt{6} = 27\sqrt{6}$.

b) A síkmetszet párhuzamos az AD éllel, ezért az alapsíkkal bezárt szögük egyenlő. Mivel D vetülete az ABC szabályos háromszög súlypontja, azért

$$\cos\alpha = \frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{6}}, \quad \alpha = 45^\circ.$$

II. rész

5. *Egy* 16 *fős csoportban a kémia átlag* 3,81 *volt (két tizedesre kerekítve). Tudjuk, hogy senki sem bukott meg.*

a) *Legfeljebb hányan kaphattak kettest?*

b) *Biztos-e, hogy volt valakinek ötöse?*

c) *Hányféleképpen lehetett pontosan* 11 *darab négyes?*

d) *Igaz-e, hogy ha a módusz* 4, *akkor a medián is* 4*?* (*16 pont*)

Megoldás. Az osztályzatok összegére (x) teljesül, hogy $3{,}805 \cdot 16 \le x < 3{,}815 \cdot 16$. Egyetlen egész esik a kívánt intervallumba, a 61.

a) Legfeljebb hatan, mert hét kettesnél a maradék 9 osztályzat összege 47 kellene legyen, ami lehetetlen. Ha hat kettes, egy négyes és kilenc ötös volt, akkor a feladat minden feltétele teljesül.

b) Nem. Lehetett például 3 db hármas és 13 db négyes.

c) A 11 négyes mellett nem lehetett a maradék 5 dolgozat mindegyike hármas vagy annál gyengébb, mert az legfeljebb 15 pont a szükséges 17 helyett, ezért biztosan volt ötös. Ha egy darab ötös volt, akkor 4 darab hármas kellett legyen, míg két ötös esetén egy hármas és két kettes osztályzattal jön ki a 17 pont.

d) Igaz. Ha a módusz 4, akkor abból legalább öt darab van, különben minden osztályzatból 4 db lenne, de annak az átlaga 3,5. Ha a medián nem 4, akkor a nagyság szerinti nyolcadik–kilencedik helyen csak hármas és négyes vagy négyes és ötös állhat. Ez utóbbi eset nem lehet, hiszen akkor az utolsó 8 hely mindegyikén ötös áll, de akkor ez a módusz; az első eset pedig azért lehetetlen, mert akkor az utolsó 8 szám összege legfeljebb $5 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 35$, így az első 8 osztályzat összege legalább 26 kellene legyen, ami még $8 \cdot 3$-nál is több.

6. *Egy derékszögű háromszög beírt körének sugara, körül írt körének sugara és a kerülete egy mértani sorozat három egymást követő tagja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a két hegyesszög tangensének összege 4.* (*16 pont*)

Megoldás. Legyen a derékszögű háromszög beírt körének sugara r, körül írt körének sugara R, befogói a és b, átfogója c. Mivel külső pontból egy körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők, $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, és $R = \dfrac{c}{2}$ a Thalész-tétel miatt. Felhasználjuk a mértani sorozat tulajdonságát és a Pitagorasz-tételt:

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b-c}{2}\right)(a+b+c), \qquad c^2 = a^2 + b^2.$$

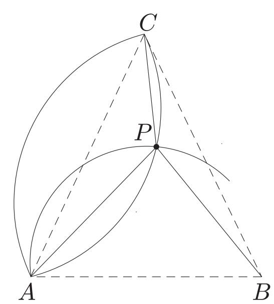
Rendezve az $a^2 - 4\,ab + b^2 = 0$ egyenlethez jutunk. Osszunk b^2-tel. Ekkor $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$-re másodfokú egyenletet kapunk, amelynek két gyöke $\operatorname{tg}\alpha = 2 \pm \sqrt{3}$. Ez a két szám egymás reciproka, ezért az egyik az egyik hegyesszögnek, másik a másik hegyesszögnek a tangensét adja, és a kettő összege valóban 4.

7. *Egy víztorony* (P) *távolságát kell az* $1:250\,000$ *arányú térkép segítségével az* A *falutól meghatározni. Ehhez két falu* (B *és* C) A*-tól való távolságát ismerjük a térképen:* $AB = 17{,}2$ cm, $AC = 20{,}0$ cm. *Lemértük továbbá, hogy*

$$APB\sphericalangle = 83^\circ, \quad APC\sphericalangle = 130^\circ \quad \text{és} \quad BAC\sphericalangle = 65^\circ.$$

Mekkora az AP *távolság a valóságban?* (*16 pont*)

Megoldás. Az adatok 3 értékes jegyet tartalmaznak. Jelöljük a PAB szöget φ-vel. Ennek segítségével kifejezhetők az $ABPC$ konkáv négyszög szögei. Felírva két szinusz-tételt az ABP és ACP háromszögekre, majd a két egyenletet egymással elosztva egy trigonometrikus egyenletet kapunk φ-re. Ennek csak a hegyesszögű megoldása értelmes a példában. Ezután AP szakasz kiszámolható. $AP = 13{,}46$ cm. Figyelembe kell azonban venni a térkép méretarányát, így a valóságban 33,65 km a távolság.



8. *Határozzuk meg azt a harmadfokú függvényt, amelyik a következő tulajdonságokkal rendelkezik:*
a) Belülről érinti az $x^2 + y = 4$ *görbét az* $x = 0$ *pontban.*
b) A két görbe metszi egymást az $x = 2$ *pontban.*
c) A két görbe közé zárt terület a $[0;2]$ *intervallumban* $\dfrac{4}{3}$.
Írjuk le a harmadfokú függvény menetét. (*16 pont*)

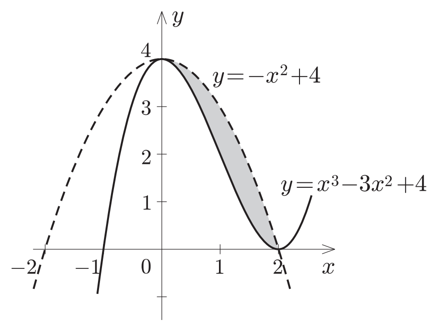
Megoldás. A harmadfokú függvényt keressük $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ alakban:
Érinti az $x^2 + y = 4$ görbét az $x = 0$ pontban, ez két dolgot jelent:
– Illeszkedik rá a $(0;4)$ pont, tehát $d = 4$ és
– A $(0;4)$ pontban közös a két görbe érintője, tehát a keresett függvény deriváltja a nulla helyen nulla, ahonnan $c = 0$.

A két görbe metszi egymást az $x = 2$ pontban, ezért $8a + 4b + 4 = 0$.

A két görbe közé zárt terület a $[0;2]$ intervallumban $\dfrac{4}{3}$. Mivel a harmadfokú görbe belülről érinti a másodfokút, ezt a területet az alábbi integrál számítja ki:

$$\int_0^2 (-x^2 + 4)\,dx - \int_0^2 (ax^3 + bx^2 + 4)\,dx = \frac{4}{3},$$

ahonnan $3a + 2b = -3$.



A keresett függvény tehát

$$x \mapsto x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1)(x-2)^2.$$

A függvény menete leolvasható az *ábráról.*

9. *Egy 9 tagú társaság felszáll a három kocsiból álló HÉV szerelvényre, de a nagy tolongásban a társaság minden tagja csak azt nézi, hogy feljusson valamelyik kocsira, nem törődik azzal, hogy a társai melyik kocsiba szálltak.*

a) Mennyi a valószínűsége, hogy mindhárom kocsiba a társaság 3–3 tagja szállt?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a három kocsi közül legalább az egyikbe nem szállt fel senki a társaság tagjai közül?

c) Mennyi a valószínűsége, hogy a három kocsi közül legalább az egyikbe legfeljebb egy ember szállt fel a társaságból? (*16 pont*)

Megoldás. Az, hogy valaki az első, második, harmadik kocsiba szállt, felfogható úgy, hogy kiválasztotta az 1, 2, 3 elemek valamelyikét. Az összes esetek száma ezért 3^9.

a) Annak a valószínűsége, hogy mindhárom kocsiba a társaság 3–3 tagja szállt, olyan sorozat valószínűségének felel meg, amelyben mindhárom elem 3-szor szerepel:

$$p = \frac{\frac{9!}{3!^3}}{3^9} \approx 0{,}085.$$

b) Ez a valószínűség úgy tekinthető, hogy a sorozat minden eleme csak előre meghatározott kettő lehet. Vigyázni kell azonban arra, hogy ne számoljuk többször azokat az eseteket, amikor mindenki ugyanarra a kocsira szállt.

$$p = \frac{\binom{3}{2}2^9 - 3}{3^9} = 0{,}07788.$$

c) Ha a három kocsi közül legalább az egyikbe legfeljebb egy ember szállt fel, akkor azok a rossz esetek, amikor minden kocsiba legalább ketten szálltak, vagyis ha az emberek eloszlása 2–2–5, vagy 2–3–4, vagy 3–3–3. A keresett valószínűség ezért

$$p = 1 - \frac{3\frac{9!}{2!2!5!} + 3!\frac{9!}{2!3!4!} + \frac{9!}{3!^3}}{3^9} = 0{,}4153.$$