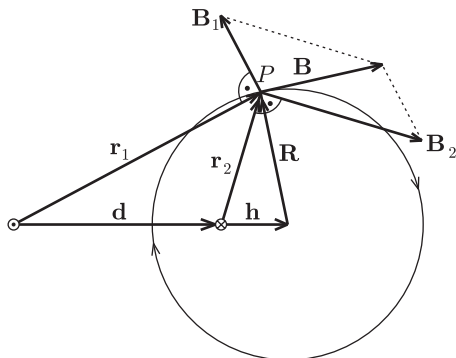


Sokféle út vezet az „üdvösséghez”; a fizikai problémák megoldásához is – számos esetben – többféle gondolatmenettel el lehet jutni. Jó példa erre a 2003. évi Eötvös-verseny 2. feladata, amely lapunk 171. oldalán olvasható megoldása mellett más módszerekkel is kezelhető. Ezen „alternatív” gondolatmenetek közül ismertetünk most kettőt. Mindkettő a versenydolgozatokban bukkant fel (részben vagy teljesen kidolgozva), és a megoldások szépsége (eleganciája) miatt feltétlenül megérdemlik, hogy Olvasóink is megismerkedjenek velük.

I. megoldás (Csóka Endre dolgozata alapján). Bebizonyítjuk, hogy a mágneses indukcióvonalak (az áramvezetők közti távolságot felező ponton áthaladó egyenestől eltekintve) körök.



1. ábra

Tekintsük az áramvezetőkre merőleges síkmetszetet, és használjuk az 1. ábrán látható vektor-jelöléseket! (A vektorokat a továbbiakban **vastag** betűvel jelöljük, az abszolút értéküket pedig a megfelelő betű vastagítás nélküli párjával; pl. $|\mathbf{B}| = B$.) Az egyes áramvezetők által létrehozott mágneses indukcióvektor tetszőleges helyen, így a P pontban is merőleges a vezetőtől a kérdéses pontba mutató \mathbf{r} vektorra, és a nagysága – a gerjesztési törvény értelmében – a távolsággal fordítottan arányos:

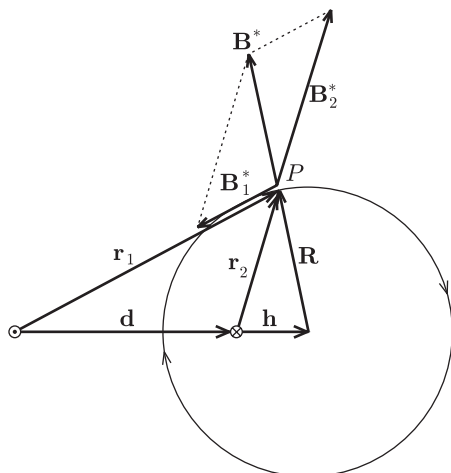
$$\mathbf{B}_1 \perp \mathbf{r}_1, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{B}_2 \perp \mathbf{r}_2,$$

továbbá

$$B_1 = \frac{K}{r_1}, \quad \text{és} \quad B_2 = \frac{K}{r_2},$$

ahol K egy – számunkra érdektelen – állandó.

Azt szeretnénk belátni, hogy az eredő mágneses indukció, \mathbf{B}_1 iránya egy alkalmasan választott kör \mathbf{R} rádiuszvektorára merőleges, tehát a kör érintőjével párhuzamos. Forgassuk el gondolatban 90 fokkal a \mathbf{B}_1 és \mathbf{B}_2 vektorokat, és velük együtt az eredő \mathbf{B} vektort is; legyenek az elforgatott vektorok \mathbf{B}_1^* , \mathbf{B}_2^* és \mathbf{B}^* (2. ábra).



2. ábra

A \mathbf{B}_1^* vektor ellentétes irányú az $\mathbf{r}_1 = \mathbf{d} + \mathbf{h} + \mathbf{R}$ vektorral, \mathbf{B}_2^* pedig egyállású az $\mathbf{r}_2 = \mathbf{h} + \mathbf{R}$ vektorral, tehát az eredőjük

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{B}_1^* + \mathbf{B}_2^* = -\frac{K}{r_1^2}(\mathbf{d} + \mathbf{h} + \mathbf{R}) + \frac{K}{r_2^2}(\mathbf{h} + \mathbf{R}).$$

Ez a vektor akkor lesz a P pont helyzetétől, vagyis az \mathbf{R} vektor irányától függetlenül \mathbf{R} -rel párhuzamos, ha

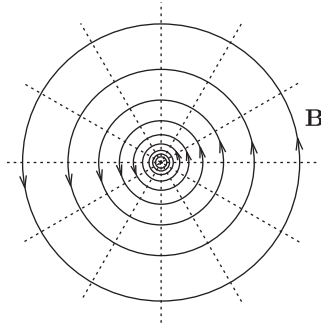
$$\frac{1}{r_1^2}(\mathbf{d} + \mathbf{h}) = \frac{1}{r_2^2}\mathbf{h},$$

azaz (\mathbf{d} és \mathbf{h} azonos irányát is figyelembe véve) fennáll, hogy

$$\lambda = \frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{h}{d+h}} = \text{állandó.}$$

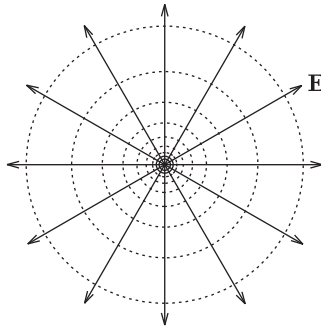
Ez pedig nem más, mint az *Apollóniosz-körök* jellemzője.

II. megoldás (Balogh László sejtése alapján). Tekintsünk először egyetlen hosszú, egyenes áramjárta vezetőt, melynek mágneses erővonalai a vezetőt körülölelő koncentrikus körök (*3. ábra*). Az ábrán az erővonalak sűrűségét a térerősség nagyságával arányosan választottuk meg, és szaggatott vonalakkal bejelöltünk egy – az erővonalakra merőleges – egyenes-sereget is. Ez utóbbiak – az elektrosztatikus mező potenciálfületeihez hasonlóan – a „síkbeli” magnetosztatikus mező ekvipotenciális vonalaiként is felfoghatók.



3. ábra

Az ábrán látható két vonalsereget figyelve feltűnhet a hasonlóság egy alkalmasan választott elektrosztatikai problémával. Egy hosszú, egyenes, egyenletesen feltöltött szál elektromos erővonalrendszere és az ekvipotenciális görbéi (a szápra merőleges síkban) éppen úgy néznek ki, mint a vizsgált mágneses mező (*4. ábra*), csak éppen a szerepek cserélődnek fel: a mágneses tér erővonalai az elektrosztatikus mező potenciálvonalainak, a mágneses erővonalakra merőleges „mágneses potenciálvonalak” pedig az elektromos tér erővonalainak felelnek meg. (Még a mágneses erővonalak sűrűsége is éppen úgy függ az áramvezetőtől mért távolságtól, mint ahogy az elektrosztatikus problémánál a potenciálgörbék sűrűsége: mindkettő a távolság reciprokával arányos.)

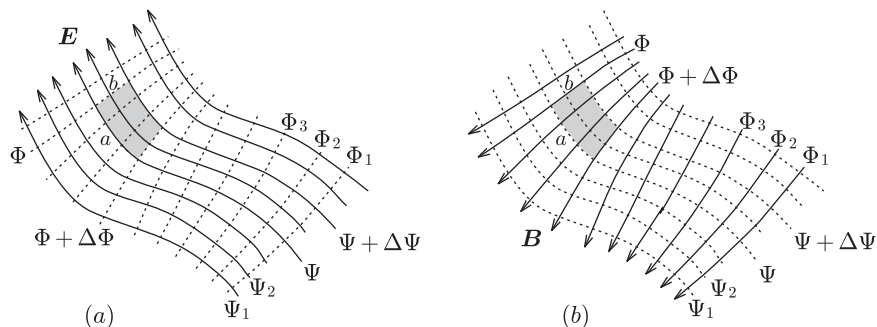


4. ábra

Felmerül a kérdés, hogy ez az analógia más, kissé bonyolultabb, még mindig vákuumbeli, de továbbra is síkbeli elektrosztatikus és magnetosztatikus mezők között is fennáll-e. (Síkbelinek nevezünk egy $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektormezőt, ha csak 2 komponense különbözik nullától, és ezek csak két koordinátától függenek; pl. $v_x(x; y)$ és $v_y(x; y)$). A ponttöltés elektrosztatikus tere *nem* síkbeli, de egy hosszú egyenes vezető már az.) Ha igen, akkor érdemes a mágneses erővonalak (egy *vektormező* irányát és nagyságát megadó görbék) helyett a megfelelő elektrosztatikus potenciált (tehát egy *skalár* mennyiséget) kiszámítani, és megvizsgálni, hogy milyen görbék mentén állandó ez a potenciálfüggvény.

Az *5. ábra* alapján könnyen beláthatjuk, hogy az említett kettősség valóban fennáll. Az (*a*) ábrán a Φ -vel jelölt vonalak az (elektromos) ekvipotenciális vonalak, Ψ pedig az elektromos tér erővonalait sorszámozza. Tekintsük a besatírozott kicsiny területet, amely a és b oldalalú téglalappal közelíthető. Az elektromos térerősség nagysága kétféle módon is kiszámítható: egyrészt az erővonalak sűrűségként (ami jelen esetben az egységnyi hosszra jutó erővonalak száma), másrészt úgy, mint az elektrosztatikus potenciál egységnyi hosszra eső megváltozása, azaz

$$|\mathbf{E}| = \frac{\Delta\Psi}{b} = \frac{\Delta\Phi}{a}.$$



5. ábra

A (b) ábrán látható mágneses tér szempontjából viszont azt írhatjuk fel, hogy

$$|\mathbf{B}| = \frac{\Delta\Phi}{a} = \frac{\Delta\Psi}{b}.$$

Látható, hogy a két formula ugyanazt a megszorítást rója ki Ψ és Φ egységnyi hosszra eső változási ütemére, tehát ha ez a feltétel teljesül, akkor abból akár \mathbf{E} , akár pedig \mathbf{B} meghatározható.

Alkalmazzuk a kapottakat az eredeti problémára, a párhuzamos egyenes vezetők mágneses terére, illetve a megfelelő elektrosztatikus problémára, a párhuzamos, hosszegységenként azonos nagyságú, de ellentétes előjelű töltéssel rendelkező szálakra. Egyetlen töltött szál elektromos tere a száltól mért távolsággal fordítottan arányos:

$$E(r) = \frac{K}{r},$$

ahol K a szál töltésével arányos állandó. Az elektrosztatikus potenciál azzal a munkával egyenlő, amelyet akkor végzünk, amikor egységnyi töltés távolságát a száltól a potenciál nullpontjának választott r_0 -nak megfelelő értékről r -re változtatjuk:

$$\Phi(r) = -K \int_{r_0}^r \frac{1}{r} dr = -K \ln \frac{r}{r_0}.$$

A két ellentétesen feltöltött szál együttes potenciálja

$$\Phi(r) = \Phi_1(r) + \Phi_2(r) = K \ln \frac{r_1}{r_0} - K \ln \frac{r_2}{r_0} = K \ln \frac{r_1}{r_2}.$$

Ez a kifejezés akkor állandó, ha a szálaktól mért távolságok aránya állandó, vagyis ha rajta vagyunk valamelyik Apollóniosz-körön. Ezek a körök alkotják tehát az eredeti feladatban a mágneses mező erővonalait.

A fenti gondolatmenetből látszik, hogy a különböző erősségű áramokkal átjárt vezetők mágneses erővonalai az

$$(r_1)^n \cdot r_2 = \text{állandó}$$

egyenlettel írhatók le, ahol n a vezetékben folyó áramok erősségének aránya. (Az Eötvös-versenyen szereplő feladatban $n = -1$. Ha például azonos nagyságú és megegyező irányú áramok eredő mágneses terére vagyunk kíváncsiak, az erővonalak az $r_1 r_2 = \text{állandó}$ egyenlettel jellemzett görbék, az ún. *lemniskáták*.)

Hangsúlyoznunk kell, hogy a sztatikus elektromos és mágneses mezők közötti hasonlóság csak síkbeli problémák-nál, tehát két dimenzióban áll fenn. A háromdimenziós térben az ekvipotenciális pontok felületet alkotnak, míg az erővonalak továbbra is görbék, tehát egydimenziós alakzatok, így az egyik erőter „potenciál-térképe” biztosan nem feleltethető meg a másik erőter erővonalainak. Azt is meg kell említenünk, hogy a „mágneses potenciálfüggvény” a szokásos matematikai függvényfogalomtól eltérően „többértékű”; ha az áramvezetőt körbejárjuk, a potenciálfüggvény értéke nem lesz ugyanannyi a végpontban, mint a kezdőpontban. (Végtelen egyenes vezetőnél pl. a mágneses potenciál az azimutszöggel arányos.) Emiatt a mágneses indukció általában *nem* konzervatív vektormező.