2003. október 17-én rendezte meg az Eötvös Loránd Fizikai Társulat Budapesten és 15 vidéki városban az 1949-es felújítása óta 55. Eötvös-versenyt. Új színfoltot jelentett *Kecskemét* belépése a versenybe. Sáró Péter, a Katona József Gimnázium és Számítástechnikai Szakközépiskola igazgatóhelyettese szervezésében 9 tanuló jelent meg és adott be itt dolgozatot. A többi vidéki helyszín (zárójelben a versenyt szervező tanár neve és a versenyzők száma) a következő volt:

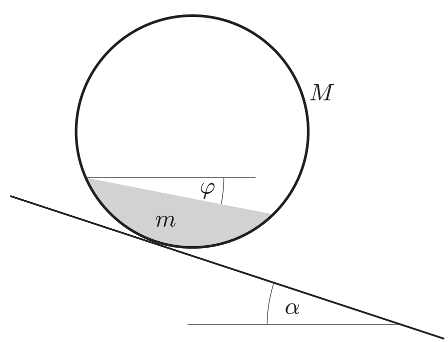
Pécs (Kotek László, 13); *Debrecen* (Kopcsa József, 11); *Nagykanizsa* (Piriti János, 7); *Szombathely* (Ruszkai Zoltán, 7); *Szeged* (Molnár Miklós, 6); *Veszprém* (Gergelyi Gábor, 6); *Békéscsaba* (Varga István, 4); *Székesfehérvár* (Ujvári Sándor, 4); *Győr* (Zábrádi Antal, 3); *Szekszárd* (Jurisits József, 3); *Nyíregyháza* (Pocsai Péter, 2); *Sopron* (Légrádi Imre, 2); *Eger* (Vida József, 1); *Miskolc* (Mester András, 1).

Összesen 79 versenyző volt 15 vidéki városban, így a Budapesten versenyző 88 diákkal együtt 167-en indultak a 2003. évi Eötvös-versenyen. Közülük összesen 1 volt nem magyar állampolgár, a szlovákiai Révkomáromból érkezett Rakyta Péter. Tavalyhoz képest – amikor is nagyjából ugyanennyien indultak a versenyen – nőtt a budapesti és csökkent a vidéki versenyzők száma. Örvendetesen sok versenyző jött a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemről: összesen 35 elsőéves hallgató. Közülük 14-en mérnök-fizikus szakon, 12-en műszaki informatikus szakon tanulnak. Még három műszaki egyetemi matematikus hallgató is volt közöttük. Reméljük, hogy a továbbiakban ők is megtartják a fizika iránti érdeklődésüket.

A középiskolák közül idén is a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnáziumból jött a legtöbb versenyző: 9 érettségizett, 8 érettségiző és 22 fiatalabb diák. Legalább 5 versenyző indult még a budapesti Piarista, a pécsi Leövey Klára, és a debreceni Kossuth Lajos Gimnáziumból, valamint a szombathelyi Savaria Szakközépiskolából.

Ismertetjük a feladatokat és azok helyes megoldását.

1. *Vékonyfalú henger csúszásmentesen gördül lefelé egy $\alpha = 10°$-os lejtőn. A henger palástjának tömege M, a határoló körlapok tömege elhanyagolható. A henger belsejében m tömegű higany van. (A henger és a higany közötti súrlódás elhanyagolható.)*



1. ábra

A higany felszínének a vízszintessel bezárt szöge valamilyen φ értékre állt be. Határozza meg ezt a φ szöget, ha
a) $M \ll m$;
b) $M = m$.

(Balogh Péter)

Megoldás. Kínálkozik a dinamikai megoldás. A higanyra erőt fejt ki a Föld és a henger. A hengerre erőt fejt ki a Föld, a higany és a lejtő. A (higany + henger) rendszerre tehát a Föld és a lejtő fejtenek ki erőt, melyek következtében a rendszer tömegközéppontja a lejtővel párhuzamos a gyorsulással mozog. S-sel jelölve a hengerre ható súrlódási erőt, a dinamika alaptörvénye szerint

$$(m+M)g\sin\alpha - S = (m+M)a.$$

A lejtőn csúszásmentesen gördülő henger az ugyancsak a gyorsulással mozgó tömegközéppontja körül $\beta = a/R$ szöggyorsulással forog. A gyorsuló forgást az S súrlódási erő idézi elő. (Vegyük észre, hogy a higany nem forog, mivel a henger és a higany közötti súrlódás elhanyagolható.) Így a forgásra vonatkozó dinamikai egyenlet:

$$SR = MR^2\,\frac{a}{R},$$

amelyből

$$S = Ma$$

adódik. Ezt a haladó mozgás dinamikai egyenletébe helyettesítve a gyorsulásra kapjuk:

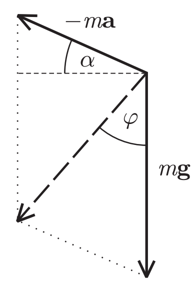
$$a = \frac{m+M}{m+2M}\,g\sin\alpha.$$

Speciális esetekben:

$$a = \begin{cases} g\sin\alpha, & \text{ha} \quad M \ll m; \\ \dfrac{2}{3} g\sin\alpha, & \text{ha} \quad M = m; \\ \dfrac{1}{2} g\sin\alpha, & \text{ha} \quad M \gg m. \end{cases}$$

A higany felszínének a vízszintessel bezárt szögét legegyszerűbben abból határozhatjuk meg, hogy a folyadék felszíne a folyadékkal együtt mozgó gyorsuló rendszerben is merőleges a rá ható (nehézségi + tehetetlenségi) erők eredőjére. Amekkora φ szöget zár be ez az eredő erő a függőlegessel, akkora φ szöget fog a higany felszíne a vízszintessel bezárni. A *2. ábra* alapján a keresett szög tangense könnyen meghatározható:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{ma\,\cos\alpha}{mg - ma\,\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\dfrac{g}{a} - \sin\alpha}.$$



2. ábra

Vizsgáljuk meg a gyorsulásra felírt három speciális esetet!

a) $M \ll m$ esetén

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos\alpha}{\dfrac{1}{\sin\alpha} - \sin\alpha} = \operatorname{tg}\alpha,$$

vagyis ekkor $\varphi = \alpha = 10°$.

b) $M = m$ esetén

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos\alpha}{\dfrac{3}{2\sin\alpha} - \sin\alpha} = \frac{2\sin\alpha\,\cos\alpha}{3 - 2\sin^2\alpha},$$

amiből $\varphi = 6{,}636° \approx 6{,}6°$.

c) $M \gg m$ esetén

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos\alpha}{\dfrac{2}{\sin\alpha} - \sin\alpha} = \frac{\sin\alpha\,\cos\alpha}{2 - \sin^2\alpha},$$

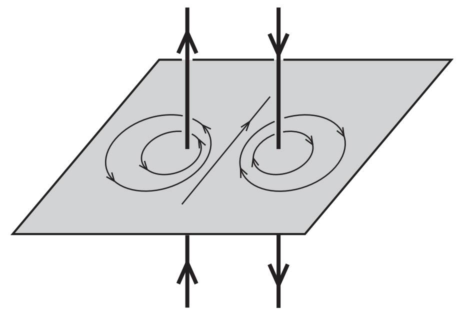
ahonnan $\varphi = 4{,}962° \approx 5{,}0°$.

Megjegyzés. A $M \gg m$ eset diszkussziója nem volt feladat, itt csak a szimmetria kedvéért, no meg azért is tárgyaltuk, mert néhány versenyző figyelmetlenségből ezt vizsgálta az $M \ll m$ eset helyett.

2. *Két párhuzamos, egymástól d távolságra haladó, végtelen hosszú, vékony egyenes vezetőben egyenlő nagyságú és ellentétes irányú áramok folynak. Az indukcióvonalak a vezetőkre merőleges síkokban helyezkednek el. Válasszon ki az egyik síkban egy tetszőleges P pontot és vizsgálja meg, hogy az ezen áthaladó indukcióvonal kör alakú-e!*

(Radnai Gyula)

Megoldás. A *3. ábra* a két párhuzamos vezető által létesített mágneses tér néhány indukcióvonalát szemlélteti, amikor a vezetőkön egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú áramok haladnak át.



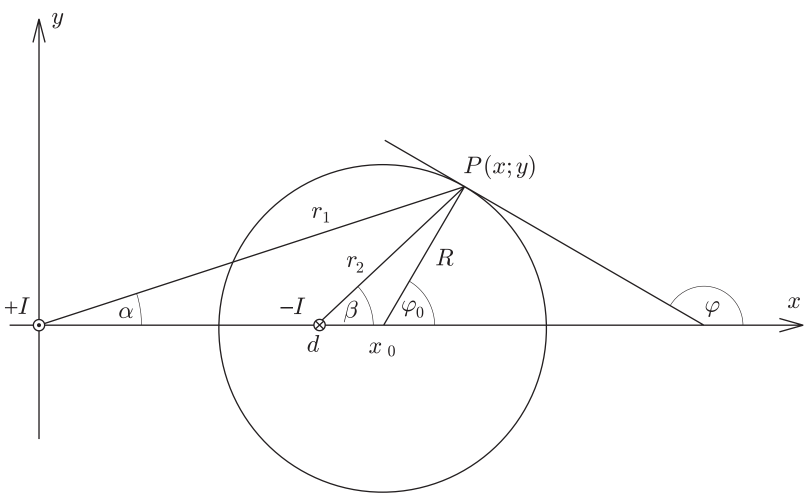
3. ábra

A speciális árameloszlás miatt a létrejövő mágneses mező nagymérvű szimmetriát mutat: az egyik és másik áramvezetőt körülölelő indukcióvonalak nemcsak egymás tükörképei, de akármelyik zárt görbe, amely mentén egy indukcióvonal halad, szimmetrikus a két áramvezetőn átfektetett síkra is. Ettől persze még lehetnek ellipszisek, körök vagy magasabb rendű zárt görbék is az indukcióvonalak, de ha van köztük kör, akkor annak a középpontja benne kell legyen az áramvezetőkön átfektetett síkban.

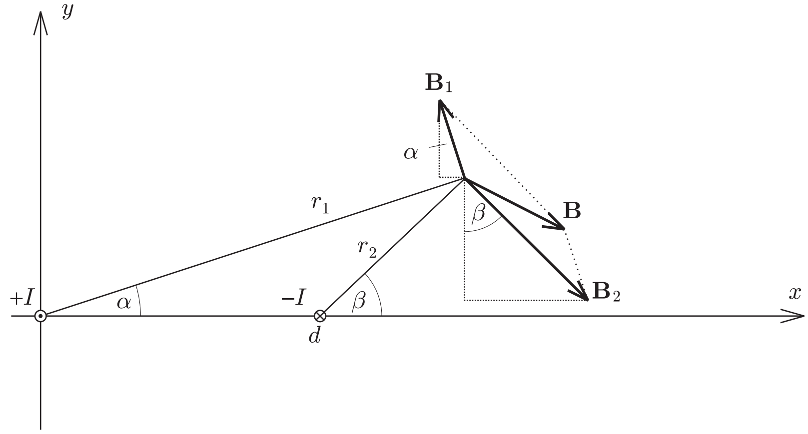
Vegyünk fel a kiválasztott síkban egy $(x;y)$ koordináta-rendszert úgy, hogy az egyik áram az origón, a másik pedig a $(d;0)$ ponton döfje át a síkot. A síkban kiválasztott $P(x;y)$ ponton átmenő körök közül tehát csak azok jöhetnek szóba indukcióvonalként, amelyek középpontja rajta van az x tengelyen. Egy ilyen kör középpontja legyen az $(x_0;0)$ pont. A kör egyenlete ekkor

$$(x-x_0)^2+y^2=R^2,$$

ahol R d-től és x_0-tól függő mennyiség.



4. ábra



5. ábra

Ha ez a kör indukcióvonal, akkor az indukcióvektor állása a kör bármely pontjában megegyezik az ottani érintő állásával (*4. ábra*). A $P(x;y)$ ponton átmenő érintő iránytangense:

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_0}=-\frac{1}{\dfrac{y}{x-x_0}}=-\frac{x-x_0}{y}.$$

Ezt kell majd összevetnünk a P pontbeli indukcióvektoron átfektetett egyenes iránytangensével. Az eredő $\mathbf{B}$ iránytangense (*5. ábra*):

$$\operatorname{tg}\varphi_B=\frac{B_y}{B_x}=\frac{B_{1y}+B_{2y}}{B_{1x}+B_{2x}}.$$

Határozzuk meg ezt a mennyiséget! Egyetlen egyenes vezető által keltett indukcióvektor nagysága:

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{1}{r}.$$

Ennek és az *5. ábráról* leolvasható geometriai összefüggéseknek a felhasználásával az egyes összetevők:

$$B_{1y}=B_1\cos\alpha=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{\cos\alpha}{r_1}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{x}{r_1^2},$$

$$B_{2y}=-B_2\cos\beta=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{\cos\beta}{r_2}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{(d-x)}{r_2^2},$$

$$B_{1x}=-B_1\sin\alpha=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{\sin\alpha}{r_1}=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{y}{r_1^2},$$

$$B_{2x}=B_2\sin\beta=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{\sin\beta}{r_2}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{y}{r_2^2}.$$

Helyettesítsük be ezeket a kifejezéseket a $\operatorname{tg}\varphi_B$-re felírt összefüggésbe! Egyszerűsítés után:

$$\operatorname{tg}\varphi_B=\frac{\dfrac{x}{r_1^2}+\dfrac{d-x}{r_2^2}}{-\dfrac{y}{r_1^2}+\dfrac{y}{r_2^2}}=\frac{x\left(\dfrac{1}{r_1^2}-\dfrac{1}{r_2^2}\right)+\dfrac{d}{r_2^2}}{-y\left(\dfrac{1}{r_1^2}-\dfrac{1}{r_2^2}\right)}=-\frac{x-\dfrac{d}{1-(r_2/r_1)^2}}{y}.$$

Ez a kifejezés akkor és csak akkor egyenlő a korábban kapott

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{x-x_0}{y}$$

képlettel, ha

$$x_0=\frac{d}{1-(r_2/r_1)^2}.$$

Behelyettesítve az $r_2=\sqrt{y^2+(x-d)^2}$ és $r_1=\sqrt{y^2+x^2}$ kifejezéseket, rendezés után a következőt kapjuk: $(x-x_0)^2+y^2=x_0(x_0-d)$. Ez pedig pontosan a megadott P ponton is átmenő, $(x_0;0)$ középpontú kör egyenlete, vagyis ez az indukcióvonal *kör alakú!* Megkaptuk a kör sugarát is:

$$R=\sqrt{x_0(x_0-d)}.$$

Íme, ebben a mágneses mezőben minden indukcióvonal kör alakú, hiszen P a tér tetszőleges pontja lehet. Egy ponton csak egyetlen indukcióvonal mehet át, az pedig kör alakú.

Megjegyzések. 1. A síkban azoknak a pontoknak a mértani helye, melyek két adott ponttól vett távolságainak *aránya* állandó, az ún. Apollóniosz-kör. Eredményeinket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a vizsgált mágneses térben *az indukcióvonalak Apollóniosz-körök.*

Bevezetve az $r_2/r_1=\lambda$ jelölést, e körök egyenlete

$$\left(x-\frac{d}{1-\lambda^2}\right)^2+y^2=\left(\lambda\frac{d}{1-\lambda^2}\right)^2,$$

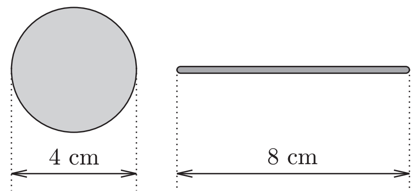
amiből többek között az $R=\lambda x_0$ érdekes összefüggés is leolvasható. (Apollóniosz időszámításunk kezdete előtt 262-től 190-ig élt; a kúpszeletekről írt munkájában ő vezette be az ellipszis, parabola és hiperbola kifejezéseket.)

2. Ha csak kicsit is általánosabb esetet vizsgálunk, a számolás meglehetősen elbonyolódik, és soha többé nem kapunk kör alakú indukcióvonalakat. Érdemes lenne számítógépes szimulációval meghatározni az ellentétes irányú, de nem egyenlő nagyságú áramok keltette mágnestér indukcióvonalait, hiszen erre $r \ll d$ esetén (az egyik áram közvetlen közelében) ugyanúgy, mint $r \gg d$ esetén (ahonnan a két áram már egyetlen $|I_1 - I_2|$ nagyságú áramnak látszik) az indukcióvonalak egyre jobban hasonlítanak a körhöz. De milyen furcsa görbék jöhetnek ki közben?

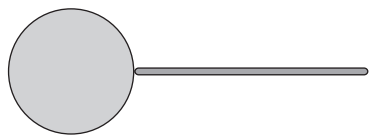
3. *Egy szabadon keringő űrhajó kabinjának belsejében mozdulatlanul lebeg egy kb.* 4 cm *átmérőjű vízgolyó és a közelében egy kb.* 8 cm *hosszúságú, vékony, kör keresztmetszetű, legömbölyített végű üvegpálca. A pálca egyik végét egészen finoman érintkezésbe hozzuk a „vízcseppel”. Vázolja fel, milyen alakot vesz fel a víz!*

(Károlyházy Frigyes)

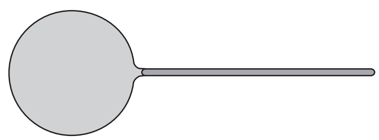
Megoldás. A kiindulási helyzetben (*6. ábra*) a vízgolyó közelében lebeg az üvegpálca.



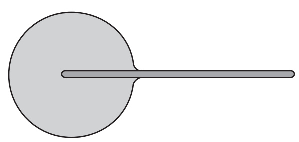
6. ábra



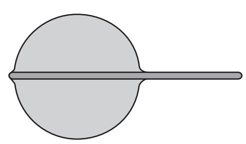
7. ábra



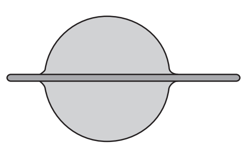
8. ábra



9. ábra



10. ábra



11. ábra

A folyamat akkor kezdődik, amikor a pálca egyik végét egészen finoman érintkezésbe hozzuk a vízcseppel (*7. ábra*). A víz nedvesíti az üveget, kissé „ráfolyik” a pálca legömbölyített végére (*8. ábra*). Itt azonban a folyamat nem állhat le, mert az üvegpálcára ható erők eredője *nem nulla.* Igaz ugyan, hogy az R sugarú vízcsepp belsejében a nyomás egy kicsit nagyobb, mint a külső légnyomás ($\Delta p = 2\alpha/R$), és ez $r^2\pi\Delta p$ erővel tolná kifelé az r sugarú pálcát, de ennél sokkal nagyobb a pálcára rásimuló vízhártya által kifejtett $2r\pi\alpha$ nagyságú húzóerő. A pálca tehát benyomul a vízcseppbe, egy közbülső helyzet a *9. ábrán* látható.

Az erőegyensúly ebben a helyzetben sem áll fenn, nincs ok, amiért a pálca megállna, egészen a *10. ábrán* látható állapotig. Most már a pálca elérte a vízcsepp bal oldali szélét, kissé túl is ment rajta, a vízfelszín itt kissé kinyomódik.

Az erőegyensúly azonban csak akkor áll be, amikor a pálca bal oldali vége teljesen kibújik a vízcseppből, ekkor a pálca mindkét végét körülölelő víz felszíne ugyanolyan alakú (*11. ábra*).

Meg kell gondolnunk még, hogy vajon a vízcsepp nem folyik-e szét a pálcán. A rendszer összenergiája a levegővel érintkező víz felületi energiájának és a vízzel érintkező üveg energiájának összegével egyenlő; ez a mennyiség igyekszik minél kisebb lenni. Tekintettel arra, hogy a pálca *vékony,* a üveg teljesfelülete elhanyagolható a vízgolyó felületéhez képest. A rendszer egyensúlyát tehát a legkisebb vízfelszín követelménye határozza meg, ez pedig (adott térfogatú víz esetén) a gömb alaknál teljesül.

A végállapotban tehát a vízgolyó majdnem pontosan gömb alakú, az üvegpálca ennek a gömbnek egyik átmérője mentén helyezkedik el, és mindkét végét „kidugja" a vízből.

Az ünnepélyes eredményhirdetésre 2003. november 21-én került sor az ELTE lágymányosi déli épületének *Mogyoródi József* tantermében, ott, ahol a budapesti versenyzők a dolgozatokat is írták.

Először a Versenybizottság elnöke emlékezett meg a nemrég elhunyt *Teller Edéről,* és bemutatta azokat a feladatokat, amelyek kiváló megoldásával Teller Ede megnyerte az 1925. évi Eötvös-versenyt. A megjelentek egyetértettek abban, hogy azok bizony könnyebb feladatok voltak, mint az ideiek. Igaz, nem is állt rendelkezésre a felkészüléshez annyi jó példatár és szakirodalom, nem voltak felkészítő szakkörök.

Azután az 50 évvel ezelőtti Eötvös-verseny feladatainak bemutatása következett, s egy diákkori fénykép az akkori nyertesről, *Zawadowski Alfréd* akadémikusról. (Sajnos ő nem tudott eleget tenni a díjkiosztásra szóló meghívásnak, mert külföldön tartózkodott. Talán majd a következőre eljön, amire újra meg fogjuk hívni, mert 1954-ben is díjazott volt az Eötvös-versenyen.) Ami az 1953-as feladatokat illeti, azok se voltak nehezebbek az 1925-ös feladatoknál. Ezen se csodálkozhatunk, akkor még nem is volt fizika rovata az újra indított Középiskolai Matematikai Lapoknak.

A bevezető visszaemlékezések után következett a 2003. évi Eötvös-verseny feladatok és ezek helyes megoldásainak bemutatása. Az első két feladat *Radnai Gyula* által adott megoldását *Gnädig Péter* egészítette ki érdekes megjegyzésekkel és egy meglepő analógián alapuló megoldás ismertetésével, míg a harmadik feladat különböző megközelítésű megoldásainak bemutatására a legjobb versenyzőket kérte fel a Versenybizottság elnöke.

A verseny díjait *Németh Judit* akadémiai levelező tag, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat elnöke adta át.

I. díjat és 20 ezer forint értékű könyvutalványt kapott **Horváth Márton,** a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Horváth Gábor* tanítványa.

II. díjat kaptak, kiegészítve 15-15 ezer forintos könyvutalványokkal **Csóka Endre,** az ELTE matematikus hallgatója, aki a debreceni Fazekas Mihály Gimnáziumban érettségizett mint *Szegedi Ervin* tanítványa és **Kómár Péter,** a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium 11. osztályos tanulója, *Dvorák Cecília* tanítványa.

III. díjat és 10-10 ezer forintos könyvutalványt nyert **Backhausz Ágnes,** az ELTE matematikus hallgatója, aki a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnáziumban érettségizett mint *Horváth Gábor* tanítványa; **Burmeister Dániel,** a miskolci Földes Ferenc Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Zsúdel László* tanítványa; **Rakyta Péter,** a révkomáromi Selye János Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Szabó Endre* tanítványa; **Szekeres Balázs,** a BMGE mérnök-fizikus hallgatója, aki a szolnoki Verseghy Ferenc Gimnáziumban érettségizett mint *Lapu Béla* tanítványa; **Vigh Máté,** a pécsi Babits Mihály Gyakorló Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Koncz Károly* és *Kotek László* tanítványa és **Zsuga Sándor,** a kecskeméti Bányai Júlia Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Késmárki Andrásné* tanítványa.

Dicséretet kaptak a következők: **Balogh László,** a BMGE mérnök-fizikus hallgatója, aki a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnáziumban érettségizett mint *Horváth Gábor* tanítványa; **Nagy Róbert,** a budapesti Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium 11. osztályos tanulója, *Pákó Gyula* tanítványa; **Nádor Csaba,** a BMGE mérnök-fizikus hallgatója, aki a budapesti Kassák Lajos Gimnáziumban érettségizett mint *Magyari Gyula* tanítványa; **Ruppert László,** a BMGE matematikus hallgatója, aki a pécsi Janus Pannonius Gimnáziumban érettségizett, mint *Keresztesné Borsos Sarolta* és *Kotek László* tanítványa.

A dicséretes versenyzők a Nemzeti Tankönyvkiadótól kaptak 8-8 ezer forint értékű könyvutalványt, a díjazottak pedig plusz 2-2 ezer forint értékűeket.

Befejezésül az elnök megköszönte az Oktatási Misztériumnak és a Nemzeti Tankönyvkiadónak a könyvutalványokat, a Typotex Kiadónak és a Műszaki Kiadónak pedig azokat a felajánlott jutalomkönyveket, amelyekből a nyertes versenyzők megjelent tanárai válogathattak.

Legboldogabb versenyző idén is az I. díjas volt, aki az erkölcsi győzelem mellé megkapta még a Társulat Eötvös-verseny érmét is. Immár ketten vannak az országban, akik ilyen éremmel rendelkeznek.