

1. Tekintsük azokat a forgáshengereket, amelyekben az alapkör sugarának és a henger magasságának az összege 10 cm. E forgáshengerek közül melyiknek a palástfelszíne a legnagyobb? Mennyi ez esetben a henger térfogata?

Megoldás. Ha $a, b \in \mathbb{R}$, akkor $0 \leq (a - b)^2$, amiből

$$4ab \leq (a + b)^2, \quad \text{így} \quad ab \leq \left(\frac{a + b}{2}\right)^2,$$

ahol egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a = b$. Legyen a forgáshenger alapkörének sugara r , magassága m . A henger palástfelszíne $P(r; m) = 2\pi rm$. Most $r + m = 10$.

$$P = 2\pi rm \leq 2\pi \left(\frac{r + m}{2}\right)^2 = 2\pi \cdot \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 50\pi.$$

A maximális palástfelszín $r = m = 5$ cm esetén adódik. Ekkor a henger térfogata $V = 5^2 \cdot \pi \cdot 5 = 125\pi$ cm³.

2. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert, ahol a valós paraméter:

$$\begin{cases} (a - 1)x + 3y = 3a, \\ x + (a + 1)y = 2. \end{cases}$$

Megoldás. Helyettesítve vagy az egyenlő együtthatók módszerével x kiküszöbölhető, kapjuk: $(4 - a^2)y = a + 2$.

a) Ha $|a| \neq 2$, akkor $y = \frac{1}{2 - a}$ és $x = 3 \cdot \frac{a - 1}{a - 2}$.

b) Ha $a = -2$, akkor $-3x + 3y = -6$ és $x - y = 2$, tehát a megoldások az $x = t + 2$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$ számpárok.

c) Ha $a = 2$, akkor $x + 3y = 6$ és $x + 3y = 2$, az egyenletek ellentmondóak, ebben az esetben nincs megoldás.

3. Egy húrtrapéz területe $144\sqrt{3}$ cm², a száruk hossza megegyezik a trapéz köré írt kör sugarával. Számítsuk ki a trapéz magasságát, átlóját és középvonalának hosszát. Kiszámítható-e a trapéz párhuzamos oldalainak hossza?

Megoldás. Az $ABCD$ húrtrapéz AD és BC száraitra $AD = BC = r$, ahol r a trapéz köré írt kör sugara. Ha a trapéz köré írt kör középpontja O , akkor az OBC háromszög mindhárom oldala r , a kör rövidebb BC ívéhez tartozó középponti szöge 60° , így $\angle CAB = 30^\circ$. Legyen $AB > DC$, a C vetülete az AB oldalra C_1 . Ekkor CC_1 a trapéz magassága, AC_1 hossza pedig megegyezik a trapéz középvonalának hosszával (miért?). Így, ha $CC_1 = m$ és $\angle CAC_1 = 30^\circ$, akkor $AC = 2m$ és $AC_1 = m\sqrt{3}$. A feltétel szerint

$$m\sqrt{3} \cdot m = 144\sqrt{3}, \quad \text{tehát} \quad m = 12 \text{ cm.}$$

$AC_1 = 12\sqrt{3}$ cm és az átló $AC = 24$ cm.

Végtesen sok ilyen húrtrapéz létezik, a párhuzamos oldalak hossza nem számítható ki.

4. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $\sqrt{4 \cdot 2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 9} = 3 - 2^{x+1};$

b) $\sqrt{2 \cos 2x - 4 \cos x + 3} = 1 - 2 \cos x.$

Megoldás. a) $4 \cdot 2^{2x} - 12 \cdot 2^{x+1} + 9 = (2^{x+1} - 3)^2$, tehát $|2^{x+1} - 3| = 3 - 2^{x+1}$, ami pontosan akkor teljesül, ha $2^{x+1} - 3 \leq 0$, $2^{x+1} \leq 3$, $x + 1 \leq \log_2 3$, $x \leq \log_2 \frac{3}{2}$.

b) $2 \cos 2x - 4 \cos x + 3 = 2(2 \cos^2 x - 1) - 4 \cos x + 3 = (2 \cos x - 1)^2,$

tehát $|2 \cos x - 1| = 1 - 2 \cos x$, ami pontosan akkor teljesül, ha $2 \cos x - 1 \leq 0$, $\cos x \leq \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$.

5. S_n, S_k, S_{n+k} egy számtani sorozat első n, k , illetve $n + k$ tagjának az összege. Igazoljuk, hogy

$$(n + k)(S_n - S_k) = (n - k) \cdot S_{n+k}.$$

Megoldás. Ha $n = k$, akkor az állítás igaz ($0 = 0$). Legyen $n \neq k$. Az ismert összegképletek szerint

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d), \quad S_k = \frac{k}{2}(2a_1 + (k - 1)d) \quad \text{és} \quad S_{n+k} = \frac{n + k}{2}(2a_1 + (n + k - 1)d).$$

Mivel

$$\begin{aligned} S_n - S_k &= (n-k)a_1 + \left(\frac{n^2-n}{2} - \frac{k^2-k}{2} \right) d = (n-k)a_1 + \frac{n-k}{2}(n+k-1)d = \\ &= \frac{n-k}{2}(2a_1 + (n+k-1)d), \end{aligned}$$

azért valóban

$$(n+k)(S_n - S_k) = \frac{(n+k)(n-k)}{2}(2a_1 + (n+k-1)d) = (n-k) \cdot S_{n+k}.$$

6. Tekintsük a $[-4; 4]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto f(x)$ függvényt, ahol

$$f(x) = \frac{|x-3| + |x+1|}{|x+3| + |x-1|}.$$

Számítsuk ki a függvény maximumát és minimumát, valamint azokat az x értékeket, ahol ezeket felveszi a függvény.

Megoldás. Mivel minden valós x esetén $|x+3| + |x-1| > 0$, azért a kifejezés a $[-4; 4]$ intervallumban valóban értelmezett.

a) Ha $-4 \leq x \leq -3$, akkor $f(x) = \frac{3-x-x-1}{-3-x-x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$, a függvény szigorúan monoton növekvő: $f(-4) = \frac{5}{3} \leq f(x) \leq 2 = f(-3)$.

b) Ha $-3 < x < -1$, akkor $f(x) = \frac{3-x-x-1}{x+3-x+1} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, a függvény szigorúan monoton csökkenő, a felvett függvényértékek: $f(-3) = 2 > f(x) > 1 = f(-1)$ (nyitott intervallumban egy szigorúan monoton függvény sem legkisebb, sem legnagyobb értéket nem vesz fel).

c) Ha $-1 \leq x \leq 1$, akkor $f(x) = 1$.

d) Ha $1 < x < 3$, akkor $f(x) = \frac{2}{x+1}$, a felvett függvényértékek: $f(1) = 1 > f(x) > \frac{1}{2} = f(3)$.

e) Ha $3 \leq x \leq 4$, akkor $f(x) = \frac{x-3+x+1}{x+3+x-1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$ és a felvett függvényértékek: $f(3) = \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{5} = f(4)$.

Az f függvény legnagyobb értéke 2, amit a -3 helyen vesz fel, legkisebb értéke $\frac{1}{2}$, amit a 3 helyen vesz fel.

7. Igazoljuk, hogy ha α, β egy háromszög két szöge és

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta,$$

akkor a háromszög derékszögű vagy egyenlő szárú.

Megoldás. Azonos átalakításokkal

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta &= (\sin \alpha + \sin \beta)(\sin \alpha - \sin \beta) = \\ &= \left(2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \left(2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

A feltételi egyenletből

$$(\sin(\alpha - \beta))(1 - \sin(\alpha + \beta)) = 0.$$

Ha $\sin(\alpha - \beta) = 0$, akkor $\alpha - \beta = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tehát most $\alpha = \beta$, ha $\sin(\alpha + \beta) = 1$, akkor $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, most $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, azaz valóban a háromszög egyenlő szárú vagy derékszögű.

8. Tapasztaljuk, hogy

$$44 - 8 = 6^2, \quad 4444 - 88 = 66^2, \quad 444444 - 888 = 666^2.$$

Igazoljuk, hogy

$$\underbrace{44 \dots 4}_{2n \text{ jegyű}} - \underbrace{88 \dots 8}_n = \underbrace{66 \dots 6^2}_n.$$

Megoldás.

$$\underbrace{44 \dots 4}_{2n \text{ jegyű}} = \underbrace{44 \dots 4}_{n \text{ szám-}} \underbrace{00 \dots 0}_{n \text{ szám-}} + \underbrace{44 \dots 4}_{n \text{ jegyű}} = \underbrace{44 \dots 4}_{n \text{ jegyű}} \cdot 10^n + \underbrace{44 \dots 4}_{n \text{ jegyű}},$$

$$\underbrace{88 \dots 8}_{n \text{ jegyű}} = 2 \cdot \underbrace{44 \dots 4}_{n \text{ jegyű}}.$$

Az adott szám:

$$\begin{aligned} \underbrace{44 \dots 4}_{n \text{ jegyű}} \cdot 10^n + \underbrace{44 \dots 4}_{n \text{ jegyű}} - 2 \cdot \underbrace{44 \dots 4}_{n \text{ jegyű}} &= \underbrace{44 \dots 4}_{n \text{ jegyű}} \cdot (10^n - 1) = (4 \cdot \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ jegyű}})(9 \cdot \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ jegyű}}) = \\ &= 6^2 \cdot \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ jegyű}}^2 = (\underbrace{66 \dots 6}_{n \text{ jegyű}})^2. \end{aligned}$$