1. *Határozzuk meg azt az $\overline{abcd}$ négyjegyű számot, amelyre*

$$\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + \overline{a} = 2003.$$

Megoldás. Írjuk fel a számokat helyi érték szerint:

$$1000a + 100b + 10c + d + 100a + 10b + c + 10a + b + a = 2003 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1111a + 111b + 11c + d = 2003.$$

$0 \le a, b, c, d \le 9$ és a, b, c, és d egész számok.

A fentiekből következik, hogy $a = 1$. Így

$$111b + 11c + d = 892 \quad \Rightarrow \quad b = 8 \quad \Rightarrow \quad 11c + d = 4 \quad \Rightarrow \quad c = 0,\ d = 4.$$

A keresett szám 1804. Ez megfelel a feltételeknek, mert $1804 + 180 + 18 + 1 = 2003$.

2. *Egy trapéz átlói merőlegesek egymásra, az egyiknek a hossza 5, a trapéz magassága 4. Mekkora a területe?*

Megoldás. Jelöljük a trapéz átlóit a szokásos módon e-vel és f-fel, a párhuzamos oldalak hossza legyen a és c, a magasság m. Ekkor a trapéz területe:

$$T = \frac{e \cdot f}{2} = \frac{(a+c) \cdot m}{2} \Rightarrow \frac{5 \cdot f}{2} = \frac{(a+c) \cdot 4}{2} \Rightarrow a + c = \frac{5}{4} \cdot f.$$

Az egyik átló megfelelő eltolásával létrejön egy olyan derékszögű háromszög, amelynek befogói e és f, az átfogója $a+c$, ezért $(a+c)^2 = e^2 + f^2 \Rightarrow \frac{25}{16} \cdot f^2 = 25 + f^2 \Rightarrow f = \frac{20}{3}$.

Ezek felhasználásával a keresett terület:

$$T = \frac{5 \cdot \frac{20}{3}}{2} = \frac{50}{3}.$$

3. *Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletet:*

$$|\sin x + \cos x| = \sqrt{2}\,(y^2 + 2y + 2).$$

Megoldás. Az egyenlet minden valós számpárra értelmezve van. Hasonlítsuk össze a két oldal értékkészletét, miután elosztjuk az egyenlet mindkét oldalát $\sqrt{2}$-vel:

$$\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right| = y^2 + 2y + 2 \Rightarrow \left|\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right| = (y+1)^2 + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| = (y+1)^2 + 1.$$

Mivel $0 \le \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \le 1$ és $(y+1)^2 + 1 \ge 1$, azért az egyenlet csak abban az esetben teljesül, ha $\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| = 1$ és $(y+1)^2 + 1 = 1$ egyidejűleg fennáll. Ebből $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ és $y = -1$. Ezek a számpárok kielégítik az eredeti egyenletet.

4. *Egy háromszögben az α szöget közrezáró oldalak hossza $\sin\alpha$ és $\cos\alpha$, a harmadik oldalé $\sqrt{1 - \sin\alpha \cdot \cos\alpha}$. Igaz-e, hogy a terület mérőszáma racionális szám?*

Megoldás. A terület mértékszámának meghatározásához ki kell számítanunk a háromszög oldalait.

A koszinusztétel szerint:

$$\left(\sqrt{1 - \sin\alpha \cdot \cos\alpha}\right)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha \ (0^\circ < \alpha < 180^\circ) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot (2 \cdot \cos\alpha - 1) = 0.$$

A háromtényezős szorzat első tényezője nem lehet 0 az α-ra felírt feltétel miatt. Ha $\cos\alpha = 0$, akkor $\alpha = 90^\circ$, így a háromszög egyik oldala 0, de ez nem lehet. Ha a harmadik tényező 0, azaz $2 \cdot \cos\alpha - 1 = 0$, akkor $\alpha = 60^\circ$. A háromszög oldalai:

$$b = \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad c = \cos\alpha = \frac{1}{2}, \quad a = \sqrt{1 - \sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{4}}.$$

Ezekre az oldalakra teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek, tehát létezik ilyen háromszög.

A háromszög területe:

$$T = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{3}{16}.$$

Ez racionális érték.

5. *Határozzuk meg az „a” valós paraméter értékét úgy, hogy a következő kifejezés értelmezési tartománya üres halmaz legyen:*

$$\sqrt{(a^2-2a-3)\cdot x^2+(2a-3)\cdot x+1}.$$

Megoldás. A kifejezés értelmezési tartománya pontosan akkor üres halmaz, ha minden valós x-re teljesül az $(a^2-2a-3)\cdot x^2+(2a-3)\cdot x+1<0$ egyenlőtlenség. Ez akkor igaz, ha $a^2-2a-3<0$, és ugyanakkor $D=(2a-3)^2-4\cdot(a^2-2a-3)<0$.

$$a^2-2a-3<0 \Rightarrow (a+1)\cdot(a-3)<0 \Rightarrow -1<a<3.$$

$$D=4a^2-12a+9-4a^2+8a+12<0 \Rightarrow a>\frac{21}{4}.$$

Az „a”-ra kapott két feltétel egyszerre nem teljesülhet, így nincs olyan „a” valós érték, amelyre az adott kifejezés értelmezési tartománya üres halmaz lenne.

Megjegyzés: Bevethetjük a behelyettesítést – ezt a legegyszerűbb, de olykor meglepően hatásos fogást: ha $x=0$, akkor a gyökjel alatt 1 áll, az értelmezési tartomány tehát nyilván nem lehet üres.

6. *Egy növekvő mértani sorozatban az első és az n-edik tag összege 66, a második és az $(n-1)$-edik tag szorzata 128, az első n tag összege 126. Írjuk fel a sorozat első n tagját.*

Megoldás. A feltételek alapján $q\neq 1$, így az alábbi egyenletrendszer írható fel:

$$\begin{aligned} a_1+a_1\cdot q^{n-1}&=66,\\ a_1\cdot q\cdot a_1\cdot q^{n-2}&=128,\\ a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}&=126. \end{aligned}$$

A második egyenletből $q^{n-1}=\dfrac{128}{a_1^2}$. Ha ezt behelyettesítjük az első egyenletbe, akkor rendezés után a_1-re egy másodfokú egyenletet kapunk: $a_1^2-66a_1+128=0$. Ennek megoldásai: $(a_1)_1=64$, $(a_1)_2=2$.

$a_1=64\Rightarrow q^{n-1}=\dfrac{128}{64^2}=\dfrac{1}{32}$, ami növekvő mértani sorozatban nem lehet.

$a_1=2\Rightarrow q^{n-1}=\dfrac{128}{2^2}=32\Rightarrow q^n=32q$. Ha ez utóbbi kifejezést behelyettesítjük az egyenletrendszer harmadik egyenletébe, akkor $2\cdot\dfrac{32q-1}{q-1}=126\Rightarrow q=2$ és $n=6$.

A sorozat első n tagja: 2; 4; 8; 16; 32; 64. Ez a sorozat a feladat összes feltételének eleget tesz.

7. *Oldjuk meg a valós számok halmazán az*

$$\frac{a+bx}{a-bx}-\frac{a-bx}{a+bx}=\frac{4ab}{a^2-b^2}$$

egyenletet, ahol $a\neq 0$, $b\neq 0$, $|a|\neq|b|$ és $a,b\in\mathbb{R}$.

Megoldás.

$$a-bx\neq 0\Rightarrow x\neq\frac{a}{b}$$

$$a+bx\neq 0\Rightarrow x\neq-\frac{a}{b}.$$

Közös nevezőre hozunk, majd eltávolítjuk a törtet:

$$\frac{a^2+2abx+b^2x^2-a^2+2abx-b^2x^2}{a^2-b^2x^2}=\frac{4ab}{a^2-b^2}\Rightarrow 4abx(a^2-b^2)=4ab(a^2-b^2x^2).$$

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát a 0-tól különböző $4ab$-vel:

$$x\cdot(a^2-b^2)=a^2-b^2x^2\Rightarrow b^2x^2+(a^2-b^2)x-a^2=0\ (b\neq 0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{b^2-a^2\pm\sqrt{b^4-2a^2b^2+a^4+4a^2b^2}}{2b^2}\Rightarrow x_1=1,\quad x_2=-\frac{a^2}{b^2}.$$

A kizárt értékeket figyelembe véve:

$$x_1=1\neq\frac{a}{b}\Leftrightarrow a\neq b;\qquad x_1=1\neq-\frac{a}{b}\Leftrightarrow a\neq -b;$$

$$x_2=-\frac{a^2}{b^2}\neq\frac{a}{b}\Leftrightarrow -a^2b\neq ab^2\Leftrightarrow ab(a+b)\neq 0;$$

$$x_2=-\frac{a^2}{b^2}\neq-\frac{a}{b}\Leftrightarrow a^2b-ab^2\neq 0\Leftrightarrow ab(a-b)\neq 0.$$

Mindkét gyök eleget tesz a feladat feltételeinek, így $x_1 = 1$ és $x_2 = -\dfrac{a^2}{b^2}$ az eredeti egyenletnek is megoldásai.

8. *Adjuk meg azoknak a valós számoknak a halmazát, amelyekre az alábbi két egyenlőtlenség egyszerre teljesül:*

$$(1) \qquad x^{\log_{36}(x+6)-\log_6 x} > 1 \qquad\qquad (2) \qquad \sin\left(\cos x + \frac{1}{2}\right) \leq 0$$

Megoldás. Az (1) egyenlőtlenségnek csak akkor van értelme, ha az x pozitív. Először keressük meg az 1-nél nagyobb számok között a megoldást. $x^{\log_{36}(x+6)-\log_{36} x^2} > x^0$. Ebben az esetben az exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő, így

$$\log_{36}(x+6) - \log_{36} x^2 > 0 \Rightarrow \log_{36}(x+6) > \log_{36} x^2 \Rightarrow x+6 > x^2 \Rightarrow x^2 - x - 6 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+2)\cdot(x-3) < 0 \Rightarrow -2 < x < 3.$$

Ha $0 < x < 1$, akkor az $x^2 - x - 6 > 0$ egyenlőtlenséghez jutunk, amelynek nincs megoldása a $(0;1)$ nyílt intervallumban.

Az $x = 1$ esetén nem teljesül az egyenlőtlenség, ezért a megoldás: $1 < x < 3$.

A második egyenlőtlenség minden valós számra értelmezve van. Akkor teljesül, ha $\pi + k\cdot 2\pi \leq \cos x + \dfrac{1}{2} \leq 2\pi + k\cdot 2\pi$. De $-\dfrac{1}{2} \leq \cos x + \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{3}{2}$, ezért $k = -1$, azaz $-\pi \leq \cos x + \dfrac{1}{2} \leq 0 \Rightarrow \cos x \leq -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{2\pi}{3} + n\cdot 2\pi \leq x \leq \dfrac{4\pi}{3} + n\cdot 2\pi$. ($k$ és n egész számok.) A két egyenlőtlenség egyszerre akkor igaz, ha $\dfrac{2\pi}{3} \leq x < 3$.