

## Szüleim és bátyám emlékére

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

$$\begin{array}{ll} a) & (2y - 1)(y - 1) = 0; \\ b) & 2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x + 1 = 0; \\ c) & 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0; \\ d) & 2 \cdot \log_2^2 x - \log_2 x^3 + 1 = 0. \end{array}$$

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

$$\begin{array}{ll} a) & 2y^2 - 3y + 1 > 0; \\ b) & 2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x + 1 > 0; \\ c) & 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 < 0; \\ d) & 2 \cdot \log_2^2 x - \log_2 x^3 + 1 > 0. \end{array}$$

3. Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög egyik befogójának végpontjai:  $A(-2; 3)$  és  $B(1; 2)$ . Számítsuk ki a háromszög harmadik csúcspontjának koordinátáit.

4. Számítsuk ki  $p$  és  $q$  értékét, ha az  $x^2 + px + q = 0$  egyenlet egyik gyöke 2, a másik gyöke pedig az egyenlet diszkriminánsának háromszorosa.

5. Az  $ABC$  háromszögben  $AC = 10$ ,  $BC = 15$  és  $\angle C = 60^\circ$ .

- Mekkora annak a félkörnek a sugara, amelynek átmérője az  $AB$  oldalra esik, és érinti a másik két oldalt?
- Mekkora annak a körnek a sugara, amely érinti az előbbi félkört, valamint az  $AC$  és  $BC$  oldalakat?

6. Egy számtani sorozat differenciája  $\frac{2}{3}$ , az első  $n$  tag összege  $\frac{8}{3}$ , az első  $(n + 3)$  tag összege  $\frac{44}{3}$ . Számítsuk ki  $n$  értékét és a sorozat első tagját.

7. Tekintsük az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x) = \frac{(x + 5)^2 - (x - 5)^2}{(2x + 5)^2 + (2x - 5)^2}$  függvényt. Számítsuk ki a függvény legnagyobb és legkisebb értékét, valamint azokat az  $x$  értékeket, ahol ezeket a függvény felveszi.

8. Az  $ABCD$  konvex négyszög  $AC$  és  $BD$  átlóinak metszéspontja  $K$ . Az  $ABK$ ,  $BCK$ ,  $CDK$  és a  $DAK$  háromszögek területe rendre  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  és  $t_4$ . Igazoljuk, hogy a négyszög  $AB$  és  $DC$  oldalai pontosan akkor (akkor és csak akkor) párhuzamosak, ha a négyszög  $T$  területe

$$T = (\sqrt{t_1} + \sqrt{t_3})^2.$$