

A 2002–2003-as tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny döntőjének egyik feladata (kissé átfogalmazva) a következő állítást tűzte ki bizonyítandóul:

*Ha valamely 2003 elemű síkbeli pontthalmaz bármely háromelemű részthalmaza tengelyesen szimmetrikus, akkor van olyan egyenes, amelyre a pontthalmaz mindegyik eleme illeszkedik.*

A feladat nem bizonyult nehéznek, örvendetesen sok helyes megoldás született. Jó néhány versenyző megoldásából kitűnt, hogy az állítás 2003 helyett már sokkal kevesebb pontból álló halmazokra is igaz. Volt, aki megjegyezte, hogy egy szabályos ötszög csúcsaiból és a középpontjából álló pontthalmaz mutatja, hogy hatelemű halmazokra nem igaz az állítás, és azt sejtje, hogy hatnál nagyobb elemszámúakra már igaz.

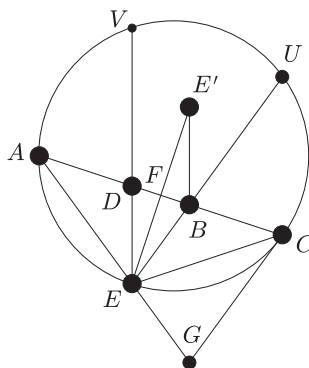
Az alábbiakban a szóba jöhető pontthalmazok számbavételével igazoljuk ezt a sejtést, majd kitérünk egy-két általánosítási lehetőségre.

### 3-szimmetrikus halmazok

A sík egy részthalmazát *3-szimmetrikusnak* nevezzük, ha bármely háromelemű részthalmaza tengelyesen szimmetrikus. Az alábbi tétel ezeket írja le.

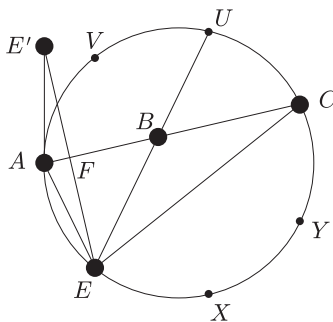
**Tétel.** *A sík egy részthalmaza akkor és csak akkor 3-szimmetrikus, ha része az alábbi 3-szimmetrikus halmazok valamelyikének:*

- egy egyenes;
- egy egyenlő szárú háromszög csúcsai, és a körülírt körének középpontja;
- egy rombusz négy csúcsa;
- egy négyzet négy csúcsa és a középpontja;
- egy szabályos ötszög öt csúcsa és a középpontja;
- egy szabályos ötszögnek vesszük négy csúcsát, és a kapott trapézhoz hozzávesszük az átlóinak a metszéspontját;
- egy szabályos ötszögnek vesszük négy csúcsát, és a kapott trapézhoz hozzávesszük a szárak meghosszabbításának a metszéspontját;
- az alábbi módon származtatott  $\mathcal{P}$  halmaz. Legyen  $AECUV$  egy szabályos ötszög,  $D$  a  $AC$  és  $EV$  átlók metszéspontja,  $B$  az  $AC$  és  $EU$  átlók metszéspontja, és  $E'$  az  $E$  tükörképe  $AC$ -re. Ekkor  $\mathcal{P} = \{A, B, C, D, E, E'\}$ ;



A (h) ábra

- az alábbi módon származtatott  $\mathcal{P}$  halmaz: legyen  $AEXYCUV$  egy szabályos hétszög,  $B$  az  $AC$  és  $EU$  átlók metszéspontja, és  $E'$  az  $E$  tükörképe  $AC$ -re; ekkor  $\mathcal{P} = \{A, B, C, E, E'\}$ .



A (k) ábra

Az első ábra a (h) konfigurációt írja le, a második a (k) konfigurációt. Érdekes azonban észrevenni, hogy az első ábrán  $ABCEU$  az (f) konfiguráció,  $ABCE'U$  és  $ABCEG$  pedig a (g) konfiguráció, ahol  $G$  az  $U$  tükörképe  $AC$ -re. Ez utóbbi állítás azért igaz, mert  $E'BCU$  és  $EBCG$  is egy-egy szabályos ötszög négy csúcsa.

A tételt állítások sorozatával bizonyítjuk. Legyen  $\mathcal{P}$  egy rögzített 3-szimmetrikus halmaz, amelyről feltesszük, hogy nem kollineáris. Mivel  $\mathcal{P}$  minden részhalmaza is 3-szimmetrikus, és a fenti tételben (a) kivételével mindegyik konfiguráció legfeljebb hatelemű, feltehető (és fel is tesszük a bizonyítás végéig), hogy  $\mathcal{P}$  véges.

**1. Állítás.** Ha  $A, B, C \in \mathcal{P}$ , és a  $BAC$  szög legalább derékszög, de nem egyenesszög, akkor  $AB = AC$ .

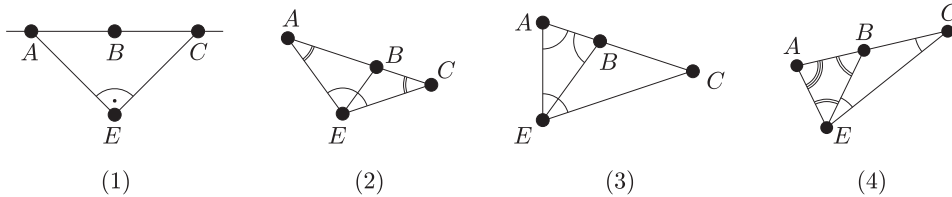
**Bizonyítás.** Az  $ABC$  háromszög tengelyesen szimmetrikus, tehát egyenlő szárú, így a két egyenlő oldallal szemben hegyesszög van.  $\square$

Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor  $\mathcal{P}$ -ben van három kollineáris pont. E rész bizonyításait is a fenti két ábrán érdemes nyomon követni, így kezdtünk a jelöléseket megtartani.

**2. Állítás.** Tegyük fel, hogy az  $A, B, C \in \mathcal{P}$  pontok ebben a sorrendben egy  $e$  egyenesen helyezkednek el, és  $E \in \mathcal{P}$  az  $e$  egyenesen kívüli pont. Legyen  $a = AB$ ,  $c = CB$ . Ekkor  $A$  és  $C$  esetleges megcserélése után a következő négy lehetőség egyike áll fenn:

- (1)  $a = c = EB$  és  $EA = EC$ . Ekkor  $A, E, C$  egy négyzet három csúcsa,  $B$  pedig a középpontja;
- (2)  $EB = c$ ,  $EA = EC = a$ . Ekkor az  $EAC$ ,  $ECA$  szögek értéke  $\frac{\pi}{5}$ , és az  $AEC$  szög értéke  $\frac{3\pi}{5}$ ;
- (3)  $EA = EB = c$  és  $EC = a + c$ . Ekkor  $ABE$  és  $ACE$  két hasonló, egyenlő szárú háromszög, melyek szárszöge  $\frac{\pi}{5}$ ;
- (4)  $EA = a$ ,  $EB = c$  és  $EC = a + c$ . Ebben az esetben az  $ACE$  és  $BEC$  szög  $\frac{\pi}{7}$ , az  $ABE$  és  $AEB$  szög  $\frac{2\pi}{7}$ , a  $CAE$  szög pedig  $\frac{3\pi}{7}$ .

A konfiguráció típusát az  $AEB$  szög is, az  $\frac{a}{c}$  arány is meghatározza.



Megjegyezzük, hogy a (2) pontban leírt  $ABCE$  konfiguráció a (h) ábrán is látható (ugyanazzal a jelöléssel), a (4) pontban leírt  $ABCE$  konfiguráció a (k) ábrán található meg, szintén ugyanazzal a jelöléssel, végül a (3) konfiguráció is rajta van a (h) ábrán, mind  $DBCE$ , mind  $ABCG$  ilyen.

**Bizonyítás.** Mivel az  $EBA$  és  $EBC$  szögek összege  $\pi$ , az  $A$  és  $C$  esetleges cseréjével feltehető, hogy az  $EBC$  háromszögben  $B$ -nél legalább derékszög van. Az 1. Állítás miatt tehát  $EB = c$  adódik, és  $EC > c$ . Mivel az  $AEC$  szög nagyobb, mint a  $BEC = BCE$  szög, ezért az  $AEC$  háromszögben  $AC > AE$ . Ez a háromszög egyenlő szárú és így vagy  $EA = EC$ , vagy  $EC = AC = c + a$ .

Tegyük fel, hogy  $EA = EC$ . Ekkor a  $CAE$ ,  $ACE$ ,  $BEC$  szögek egyenlők, és az  $ABE$  szög ennek kétszerese (a  $BCE$  háromszög külső szöge). Ezért az  $ABE$  háromszögben az  $A$  csúccsal szemközti oldal kisebb, mint a  $B$  csúccsal szemközti. Ez a háromszög egyenlő szárú, és így vagy  $a = AB = BE = BC$  (ekkor kapjuk az (1) esetet), vagy  $a = AB = AE$  (ekkor kapjuk a (2) esetet).

Ha nem  $EA = EC$ , hanem  $EC = AC = a + c$  teljesül, akkor a  $CAE$  és  $CEA$  szögek lesznek egyenlők. Ez utóbbi nagyobb, mint a  $BEA$  szög, és ezért az  $ABE$  háromszögben  $c = EB > AB = a$ . Ez is egyenlő szárú háromszög, tehát vagy  $EA = EB = c$  (ekkor kapjuk a (3) esetet), vagy  $EA = AB = a$  (ekkor pedig a (4) esetet). Mind a négy esetben triviálisan kiszámolhatjuk a felsorolt szögeket.  $\square$

**3. Állítás.** Tegyük fel, hogy az  $A, D, B, C \in \mathcal{P}$  pontok ebben a sorrendben egy  $e$  egyenesen vannak, és  $E \in \mathcal{P}$  az  $e$  egyenesen kívüli pont. Ekkor  $ABCE$  az előző állítás (2) pontjában leírt alakzat, és  $D$  a  $B$  pont tükörképe az  $AC$  felezőpontjára (lásd a (h) ábrát). Ha  $\mathcal{P}$  nem kollineáris, akkor egy egyenesen legfeljebb négy pontja lehet.

**Bizonyítás.** Jelölje  $F$  az  $E$  merőleges vetületét  $e$ -re. Az előző állítás szerint mindkét  $F$  kezdőpontú (zárt) félegyenesen legfeljebb két pont lehet  $\mathcal{P}$ -beli (hiszen  $F$  mindegyik előző állításbeli konfigurációban az  $AC$  szakasz belső pontja). Tehát  $F$  a  $DB$  szakasz belső pontja, és mind  $DBCE$ , mind  $BDAE$  az előző állításban leírt (2), (3), vagy (4)

típusú konfiguráció. Az  $EBD$  szög meghatározza mindkét konfiguráció típusát, tehát a két típus ugyanaz (és így egyik a másiknak tükörképe az  $EF$  egyenesre). Emiatt  $EB = ED$ , és akkor mindkét konfiguráció (3) típusú.  $\square$

**4. Következmény.** *Tegyük fel, hogy  $\mathcal{P}$  egy 3-szimmetrikus halmaz, melynek van három kollineáris pontja, de nem kollineáris. Ekkor  $\mathcal{P}$  része a tételben felsorolt alakzatok valamelyikének.*

**Bizonyítás.** Legyenek  $A, B, C \in \mathcal{P}$  ebben a sorrendben egy  $e$  egyenes pontjai. Keressük meg az összes lehetséges  $E \in \mathcal{P}$  pontot az  $e$  egyenesen kívül.

Először azt vizsgáljuk, hogy mikor lehet az  $ABC$  pontokhoz az  $e$  egyenes *ugyanazon oldalán két különböző*  $E$  pontot illeszteni. A 2. Állításban szereplő négy alakzat hasonlóság erejéig egyértelműen meghatározott. Ezért ha megadjuk az  $A, B, C$  pontokat, akkor az  $E$  pontot (az  $e$  egyenes megadott oldalán) ez egyértelműen meghatározza. Mivel a 2. Állítás megengedi az  $A$  és  $C$  cseréjét is, így elvileg kétszer négy  $E$  pontot illeszthetünk  $ABC$ -hez.

Azonban nem minden  $ABC$  pontháromhoz lehet  $E$  pontot illeszteni, hanem csak azokhoz, ahol az  $\frac{AB}{BC}$  szakaszok aránya megfelelő. Ez az arány a 2. Állításban szereplő négy alakzat esetében más és más. Ha meg a  $CBA$  pontokhoz keressük az  $E$  pontot, akkor a fenti arány reciprokát kell tekinteni. Az egyetlen lehetséges egybeesés az, amikor az  $ABC$ , illetve  $CBA$  ponthármasok egyikéhez (2) típusú, a másikhoz (3) típusú alakzatot illesztünk ( $e$  ugyanazon oldalára). Így a (h) ábrán is szereplő  $E$ , illetve  $G$  pontokat kapjuk, ez a (g) konfiguráció, ami tehát az egyetlen, ahol  $e$  egyik oldalán legalább két pont szerepel.

Másodszor azt vizsgáljuk, hogy az egyenes *két oldalán egyszerre* milyen  $E$  pontok lehetnek. Az  $\frac{AB}{BC}$  arány meghatározza, hogy milyen típusú alakzatot építhetünk  $ABC$ -re, illetve  $CBA$ -ra. A típusokat ismét nem lehet keverni, kivéve, hogy a (2)-nek megfelelő alakzathoz hozzátehetjük a (3)-nak megfelelő alakzatot az egyenes túloldalára. Ekkor kapjuk a tételbeli lista (f) elemét (a (h) ábrán  $ABCEU$ ). A 2. Állításban szereplő (1) és (4) alakzatot, illetve a 3. Állításban szereplő alakzatot is tükrözhetjük  $e$ -re, ekkor (d), (k), illetve (h) adódik.

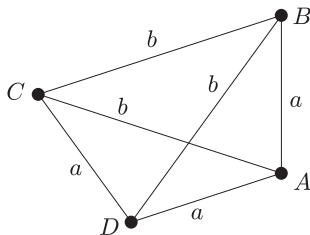
Ahhoz, hogy több alakzat már nincs, azt kell megmutatni, hogy ha  $e$  mindkét oldalán szerepel  $\mathcal{P}$ -beli pont, akkor mindkét oldalon legfeljebb egy szerepelhet, vagyis hogy a (g) alakzat túloldalán már nem szerepelhet pont. Mivel  $A, E, G$  kollineáris, az eddig elmondottakat  $ABC$  helyett erre a három pontra is alkalmazhatjuk (valójában megcseréltük  $B$ -t  $E$ -vel és  $C$ -t  $G$ -vel). Így az  $AEG$  egyenes  $B$ -t és  $C$ -t tartalmazó oldalán sem szerepelhet több pont. Mivel mindegyik eddig kapott alakzatot tartalmazza az  $A$  pontban  $e$ -re emelt merőleges által meghatározott,  $C$ -t tartalmazó félsík, ezért az egész síkon nem lehet több pontja  $\mathcal{P}$ -nek.  $\square$

Mostantól legyen  $\mathcal{P}$  véges, 3-szimmetrikus halmaz, amelynek nincs három kollineáris pontja. Elsőnek a négyszögeket tekintjük át.

**5. Állítás.** *Tegyük fel, hogy  $A, B, C, D \in \mathcal{P}$  négy különböző pont. Ekkor az  $ABCD$  alakzat az alábbiak valamelyike:*

- (1) *egy egyenlő szárú háromszög csúcsai, és a körülírt körének középpontja;*
- (2) *egy rombusz négy csúcsa;*
- (3) *egy szabályos ötszög négy csúcsa.*

*Ha a négy pont konvex burka háromszög, akkor az első eset áll fenn. Ha négyszög, akkor az (1) és (2) esetben  $ABCD$  szimmetrikus bármelyik olyan szögfelezőjére, amely legalább derékszög.*



**Bizonyítás.** Ismét az 1. Állítást használjuk. Ha  $A, B, C, D$  közül valamelyik, mondjuk  $D$  az  $ABC$  háromszög belsejében van, akkor a  $D$ -nél lévő három darab szög ( $ADB, BDC, CDA$ ) összege  $2\pi$ , és így nem lehet közöttük két hegyesszög. De akkor  $DA = DB = DC$  teljesül, és az (1) esetben vagyunk.

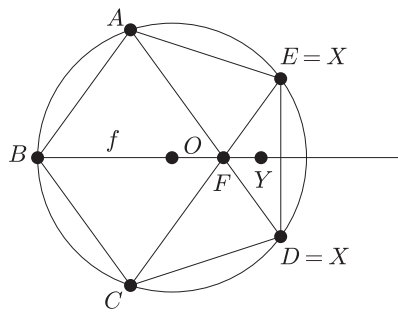
Feltehetjük tehát, hogy  $ABCD$  egy konvex négyszög, amelynek nincs olyan csúcsa, amely a többi három csúcstól egyenlő távolságra van. Mivel a négyszög valamelyik szöge legalább derékszög, van két szomszédos egyenlő oldal, mondjuk  $DA = AB = a$ . Ha a négyszög nem rombusz, akkor feltehető, hogy például  $BC \neq a$ , és mivel az  $A$  csúcsból nem indulhat ki három egyenlő szakasz,  $AC \neq a$ . De az  $ABC$  háromszög egyenlő szárú, és így  $AC = BC = b \neq a$ . Mivel a  $C$  csúcsból sem indulhat ki három egyenlő szakasz,  $CD \neq b$ . Az  $ACD$  háromszögben tehát az egyik oldal  $a$ , a másik  $b \neq a$ , a harmadik nem  $b$ , tehát akkor csak  $a$  lehet, vagyis  $CD = a$ . A  $DBC$  háromszögből tehát  $BD$  is  $a$  vagy  $b$ , de  $a$  nem lehet, mert  $D$ -ből sem indulhat ki három egyenlő szakasz. Tehát  $DB = b$ . A szögeket kiszámolva a szabályos ötszöghöz jutunk.

Végül az utolsó állítás rombuszra nyilvánvaló, ha pedig az alakzat az  $ABC$  egyenlő szárú háromszögből, és a köré írt kör  $O$  középpontjából áll, ahol  $AB = BC$ , akkor a konvexitás miatt  $ABC$  tompaszög, és  $OA = OB = OC$  miatt az  $A$  és  $C$  csúcsoknál hegyesszög van. Az  $O$ -nál nem biztos, de ez nem baj, mert a négyszög szimmetrikus  $OB$ -re.  $\square$

**6. Állítás.**  $\mathcal{P}$  halmaz vagy konvex helyzetű, vagy egy pontja kivételével egy körön fekszik, és a kivételes pont a kör középpontja.

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy az  $O \in \mathcal{P}$  pont a  $\mathcal{P}$  konvex burkának belsejében van, és e konvex burok csúcsai  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}$ . Az  $n$  szerinti indukcióval belátjuk, hogy  $O$  mindegyik  $A_i$ -től egyenlő távolságra van. Ha  $n = 3$ , akkor ez az 5. Állításból következik. Tegyük fel, hogy az  $n$ -nél kisebb számokra igaz az állítás. Elég belátni, hogy  $OA_1 = OA_2$ . Tegyük fel, hogy ez nem igaz. Ekkor  $O$  nem lehet az  $A_1A_2A_3$  háromszög belsejében (hiszen  $n = 3$ -ra tudjuk az állítást). Emiatt az  $A_1A_3A_4 \dots A_n$  belsejében van, és így az indukciós feltevés miatt  $O$  egyenlő távolságra van az  $A_1, A_3, A_4, \dots, A_n$  mindegyikétől. Ezt a gondolatmenetet ismételjük meg az  $A_1A_3$  helyett az  $A_2A_n$  átlóval. Ekkor látjuk, hogy az  $O$  távolsága  $A_2, \dots, A_n$ -től is ugyanaz. De akkor  $OA_1 = OA_n = OA_2$ . Ez az ellentmondás bizonyítja az állítást.  $\square$

**7. Állítás.** Ha a  $\mathcal{P}$  halmaz legalább ötelemű, akkor része egy szabályos ötszög csúcsai és a középpontja által alkotott alakzatnak.



**Bizonyítás.** Legyenek  $A, B, C$  szomszédos csúcsai  $\mathcal{P}$  konvex burkának úgy, hogy  $ABC$  legalább derékszög (ilyen létezik, hiszen a 6. Állítás miatt a konvex burok legalább négyszög). A  $\mathcal{P}$  halmaznak az  $A, B, C$ -n kívül van még legalább két pontja. Mivel az  $ABC$  szög  $f$  felezőjén (mint minden egyenesen) legfeljebb két  $\mathcal{P}$ -beli pont lehet, melyek közül  $B$  az egyik, van olyan  $X \in \mathcal{P}$  (és  $X \neq A, C$ ), ami nincs ezen a szögfelezőn. Egy ilyen  $X$  pont nem lehet az  $ABC$  köré írt kör  $O$  középpontja (mert  $O$  az  $f$ -en van). Így a 6. Állítás miatt  $ABCX$  konvex négyszög. Mivel  $ABC$  legalább derékszög, és  $X$  nincs  $f$ -en, az 5. Állítás utolsó mondata miatt  $ABCX$  egy szabályos ötszög négy csúcsa. Tehát az  $X$  pont az  $ABC$  háromszöget tartalmazó szabályos ötszög másik két  $D$  és  $E$  csúcsának valamelyike (vagyis  $D$  és  $E$  egyike, mondjuk  $D$  benne van  $\mathcal{P}$ -ben). Az előzőek szerint  $\mathcal{P}$ -nek ezen ötszög csúcsain kívül már csak  $f$ -en lehet pontja (a  $B$ -n kívül legfeljebb egy). Tegyük fel, hogy  $Y$  ilyen pont, azt kell megmutatnunk, hogy  $Y = O$ . Ha ez nem igaz, akkor  $O \notin \mathcal{P}$ , és így a 6. Állítás miatt  $\mathcal{P}$  konvex, vagyis ha  $F$  jelöli az  $AD$  és  $CE$  átlók metszéspontját, akkor  $Y$  az  $F$ -ből kiinduló,  $B$ -t nem tartalmazó félegyenesen lehet csak. De akkor  $ABY$  nem egyenlő szárú háromszög (mert  $ABCF$  rombusz, amelyben a szögei miatt  $BA = AF < BF$ , és így  $YA$  és  $YB$  is nagyobb, mint  $AB$ ). Ezzel az állítást és a tételt is beláttuk.  $\square$

## Általánosítások

Természetes módon vetődik fel a kérdés, vajon mit mondhatunk azokról a síkbeli ponthalmazokról, amelyeknek minden négyelemű részhalmaza tengelyesen szimmetrikus. Vagy általánosabban, valamely rögzített  $k$  szám mellett megkérdezhetjük, mely ponthalmazok lesznek  $k$ -szimmetrikusak, azaz olyanok, hogy bármely  $k$ -elemű részhalmazuk tengelyesen szimmetrikus.

Alább következik néhány példa nem-kollineáris,  $k$ -szimmetrikus halmazokra, amelyeket – tetszőleges  $k$  mellett – némi keresgélés után bárki könnyen megtalálhat. Érezhető, hogy ilyen halmazok kereséséhez úgy érdemes hozzáfogni, hogy a  $k$  számot nem tartjuk rögzítve, hanem (először) azt követeljük meg, hogy a keresett ponthalmaz bármely elemét elhagyva a maradék tengelyesen szimmetrikus legyen. Nevezzük az ilyen halmazokat *egy híján szimmetrikusnak*.

Az alábbi síkbeli ponthalmazok könnyen látható módon mindannyian egy híján szimmetrikusak:

- (a) egy szabályos sokszög összes csúcsa;
- (a') egy szabályos sokszög összes csúcsa és a középpontja;
- (b) egy csúcs kivételével egy szabályos sokszög összes csúcsa;
- (b') egy csúcs kivételével egy szabályos sokszög összes csúcsa és a középpontja;

- (c) két merőleges egyenesen mindkét egyenesre nézve tengelyesen szimmetrikusan elhelyezkedő pontok;
- (d) néhány közös középpontú (és különböző méretű) szabályos  $m$ -szög és  $2m$ -szög csúcshalmazának egyesítése úgy, hogy a sokszögek rendszerében szereplő  $m$ -szögek szimmetriatengelyei közösek (tehát az  $m$ -szögek kétféle állásúak lehetnek), és a  $2m$ -szögek csúcsai illeszkednek az  $m$ -szögek szimmetriatengelyeire (és így a  $2m$ -szögek csak egyféle állásúak lehetnek);
- (d') egy (d) alatt leírt pontrendszer a sokszögek közös középpontjával együtt.

Észrevehetjük, hogy az itt felsorolt ponthalmazok közül az (a) és (a') alattiak *kettő híján szimmetrikusak* is, azaz bármelyik két pontjukat elhagyva a maradék pontrendszer tengelyesen szimmetrikus.

Van-e még a felsoroltakon kívül véges, nem-kollineáris, egy híján szimmetrikus ponthalmaz a síkon? Bebizonyítható, hogy nincsen. Ennek az igazolását feladat formájában az érdeklődő olvasóra hagyjuk, megtoldva azzal, hogy a kettő híján szimmetrikus halmazokból sem lehet az imént említettektől különbözőt találni.

### Feladatok:

- (1) *Bizonyítsuk be, hogy a sík bármely legalább ötelemű, véges, egy híján szimmetrikus részhalmaza a fenti (a)–(d') példák valamelyike.*
- (2) *Bizonyítsuk be, hogy a sík bármely legalább hatelemű, véges, kettő híján szimmetrikus részhalmaza a fenti (a) és (a') példák egyike.*

Ezeket az eredményeket felhasználva könnyen nyerhetünk teljes áttekintést minden  $k$ -ra a sík  $k$ -szimmetrikus ponthalmazairól. Például rögtön következik az a tétel, hogy  $k \geq 4$  esetén ha egy  $k$ -szimmetrikus ponthalmaz legalább  $(k + 3)$ -elemű, akkor kollineáris.

Érdekes kérdés végül az is, hogy ha az egy híján (vagy kettő híján) szimmetrikus ponthalmazok keresésekor nem korlátozódunk véges halmazokra, milyen újabb példákat kaphatunk. (Ilyenek például egy körvonal vagy egy körlemez összes pontjából, vagy a sík összes racionális koordinátájú pontjából álló halmazok, és még sok más, hasonló módon nyerhető példa.) Ezeknek a halmazoknak az áttekintése és leírása szintén az érdeklődő olvasóra vár.