



1

Gnädig Péter, Vankó Péter

1. feladat. *Inga, melynek felső végét is egy súly húzhatja*

a) Mivel a fonal hossza $L = s + R\theta$ állandó, a megfelelő változási sebességek közötti kapcsolat: $\dot{s} + R\dot{\theta} = 0$.

b) A Q pont R sugarú körpályán mozog $\dot{\theta}$ szögsebességgel, a sebessége O -hoz viszonyítva $\mathbf{v}_O = R\dot{\theta}\hat{\mathbf{t}}$, ami $-\dot{s}\hat{\mathbf{t}}$ alakba is írható.

c) A P pont Q -hoz viszonyított sebessége

$$\mathbf{v}_Q = -s\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}} + \dot{s}\hat{\mathbf{t}}.$$

Az első tag az s sugarú, $\dot{\theta}$ szögsebességű körmozgás kerületi sebessége, a második tag pedig a QP fonálhossz változását veszi figyelembe.

d) A P pont O -hoz viszonyított (tehát az inerciarendszerben mérhető) sebessége

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_Q = -s\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}}.$$

Ez tisztán érintő irányú, összhangban azzal a ténnyel, hogy az O pontbeli fonaldarab pillanatnyi sebessége az inerciarendszerben mérve nulla. (Maga az O pont nem egy bizonyos anyagi pontot, hanem a fonal pillanatról pillanatra változó darabkáját jelöli. Ehhez a mozgó ponthoz képest a P pont fonál irányú sebességgel is rendelkezik, ez a fiktív mozgás azonban az inerciarendszerből szemlélve már eltűnik.)

e) A P pontban levő részecske gyorsulásának $\hat{\mathbf{t}}$ irányú (tehát fonál irányú) komponense a centripetális gyorsulás képletének megfelelően

$$(1) \quad -s\dot{\theta}^2.$$

f) A P pontban levő test gravitációs helyzeti energiája

$$U(\theta) = -mg[R(1 - \cos \theta) + s \sin \theta].$$

(A helyzeti energiát a test indítási magasságában választottuk nullának.)

g) A pálya legalacsonyabb pontja $\theta = \pi/2$ -nek felel meg (itt válik a sebesség függőleges komponense nullává). Ebben a pontban a test helyzeti energiája minimális:

$$U_{\min} = U(\pi/2) = -mg[R + L - (R\pi/2)].$$

Alkalmazva a mechanikai energiamegmaradás tételét:

$$E = 0 = \frac{1}{2}mv^2 + U_{\min},$$

ahonnan

$$v = \sqrt{2g[R + L - (R\pi/2)]}.$$

h) A test mozgási energiája egy tetszőleges θ szöggel jellemzett helyzetben (az energiamegmaradás tétele szerint)

$$\frac{1}{2}mv^2 = -U(\theta) = mg[R(1 - \cos \theta) + s \sin \theta],$$

ahonnan

$$(2) \quad v^2 = (s\dot{\theta})^2 = 2g[R(1 - \cos \theta) + s \sin \theta].$$

Jelöljük K -val a fonalat feszítő erőt. A fonál irányú mozgásegyenlet (1) felhasználásával

$$(3) \quad m(-s\ddot{\theta}) = -K + mg \sin \theta,$$

¹A feladatok szövegét a KöMaL októberi számában közzöltük. A kísérleti fordulóról – helyhiány miatt – csak a következő számunkban tudunk beszámolni.

ahonnan (2) segítségével kifejezhető a fonálerő:

$$K = m(s\dot{\theta}^2 + g \sin \theta) = \frac{mg}{s} [2R(1 - \cos \theta) + 3s \sin \theta] = \\ = \frac{mgR \sin \theta}{s} \left[\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} \left(\theta - \frac{L}{R} \right) \right].$$

A fonál meglazulásának ($K = 0$ -nak) megfelelő θ_0 szögre fennáll

$$\frac{3}{2} \left(\theta_0 - \frac{L}{R} \right) = \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2},$$

amit L/R megadott értékének behelyettesítésével

$$(4) \quad \theta_0 - \frac{9\pi}{8} = \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{16}$$

alakban is felírhatunk. Ennek az egyenletnek ránézésre megadható egy gyöke: $\theta_0 = \frac{9\pi}{8}$. Ha valaki nem veszi észre ezt a megoldást, numerikusan (zsebszámológép segítségével) is megkaphatja a (4) trigonometrikus egyenletet gyökét: $\theta_0 \approx 3,53$ radián. Ellenőrizhető, hogy a $0 < \theta < \theta_0$ tartományban $K > 0$, tehát a fonál korábban nem lazul meg.

A fonál legrövidebb, de még nem laza helyzetében

$$s = s_{\min} = L - R\theta_0 = \frac{2R}{3} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{16} \approx 3,352 R,$$

a test sebességének nagysága pedig ekkor (4) szerint

$$v_0 = \sqrt{-gs_{\min} \sin \theta_0} = \sqrt{\frac{2gR}{3} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{16} \sin \frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{4gR}{3}} \cos \frac{\pi}{16} \approx 1,133 \sqrt{gR}.$$

i) A mozgás további részében a test v_0 kezdősebességű ferde hajítást végez. A pálya legmagasabb H pontjában a sebessége

$$v_H = v_0 \sin(\theta_0 - \pi) = \sqrt{\frac{4gR}{3}} \cos \frac{\pi}{16} \sin \frac{\pi}{8} = 0,433 \sqrt{gR}$$

lesz, és a H pontig a vízszintes elmozdulása

$$d = \frac{v_0^2 \sin 2(\theta_0 - \pi)}{2g} = \frac{\sqrt{v_0^2}}{2g} \sin \frac{9\pi}{4} = 0,453 R.$$

Meg kell még vizsgálnunk, hogy a H pont elérése előtt nem ütközik-e neki a test a rúdnak. A $\theta = \theta_0$ helyzetnek megfelelő pontban a test koordinátái:

$$x_0 = R \cos \theta_0 - s_{\min} \sin \theta_0 = 0,358 R,$$

$$y_0 = R \sin \theta_0 + s_{\min} \cos \theta_0 = -3,478 R.$$

Látható, hogy $|y_0| > R + d$, így a test valóban eléri a pálya legmagasabb pontját.

j) A fonál súrlódásmentes csúszása során a m és a M tömegű testből álló rendszer teljes mechanikai energiája állandó marad. Ha a M tömegű test a mozgása során D -vel mélyebbre kerül, a helyzeti energiája MgD értékkel csökken, ugyanennyivel nő tehát a m tömegű test helyzeti és mozgási energiájának összege, és ez az összeg a fonál megtapadása után is változatlan marad.

Ha $L - D$ mellett R elhanyagolható, akkor a m tömegű test mozgását a továbbiakban rögzített pont körüli ingamozgásnak tekinthetjük. A fonál meglazulása szempontjából a legkényesebb helyzet a pálya legmagasabb pontja. Itt a test $L - D$ magasan van a rúd felett, sebességét pedig az

$$\frac{1}{2}mv^2 = MgD - mg(L - D)$$

egyenlet határozza meg. A fonál akkor nem lazul meg ebben a helyzetben, ha a gravitációs erő kisebb, mint a körmozgáshoz szükséges centripetális erő:

$$mg < \frac{mv^2}{L - D},$$

ami a munkatételből adódó sebesség kiküszöbölésével

$$mg < 2 \frac{MgD - mg(L - D)}{L - D}$$

alakra hozható. Innen

$$\frac{D}{L} > \frac{1}{1 + \frac{2M}{3m}}.$$

Megjegyzések. 1. A m/M arány – a feladat egyszerűsítő feltevéseinek teljesülése esetén – egyértelműen meghatározza a D/L hányadost, igaz, ehhez egy bonyolult differenciálegyenletet kellene megoldanunk. A fenti egyenlőtlenség tehát tulajdonképpen csak a tömegek arányára jelent megkorlátozást.

2. A súrlódásmentes csúszás és nagyon nagy tapadási súrlódás feltételezése nyilván távol áll a realitástól. A leírt jelenséghez hasonló azonban mégis megvalósítható. Ha egy vékony, sima rúddal és jól csúszó, kellően hajlékony fonállal (például horgászdramillal), és megfelelően választott nehezékekkel (pl. acélsavarrakkal) végezzük el a kísérletet, a mozgás első szakasza jó közelítéssel súrlódásmentesnek tekinthető. Igaz ugyan, hogy a fonál a megtapadása után vélhetően újra megcsúszik a hengeren, de a fonál fokozatos feltekeredése miatt (kötélsúrlódás) előbb-utóbb megállítja a csúszást, éppen úgy, mintha a tapadó súrlódás nagyon nagy lenne. Egyszerű eszközökkel kísérletileg is jól vizsgálható, hogy a kérdéses furcsa mozgás valóban létrejöhessen, a m tömegű test többször is átfordulhat a rúd felett, és a mozgás akár a fonal teljes feltekeredéséig is tarthat.

2. feladat. Piezoelektromos kristályrezonátor elektromos váltófeszültséggel

a) A rúd bal oldali részének deformációja (relatív hosszváltozása)

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{-v \Delta t}{u \Delta t} = \frac{-v}{u},$$

a nyomás tehát a bal oldali felületnél

$$p = -YS = Y \frac{v}{u} = \rho u v.$$

(Kihasználtuk, hogy a lökéshullám terjedési sebessége $u = \sqrt{Y/\rho}$.)

b) Ha a rúd (helyről helyre és pillanatról pillanatra változó) elmozdulása

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x - ut),$$

akkor a sebesség (deriválással, vagy a forgómozgással való analógia kihasználásával)

$$v(x, t) = -k u \xi_0 \cos k(x - ut),$$

a deformáció (az előző alkérdés eredményének felhasználásával, vagy közvetlenül az elmozdulásfüggvény x szerinti deriválásával)

$$S(x, t) = \frac{-v(x, t)}{u} = k \xi_0 \cos k(x - ut),$$

a nyomás pedig

$$p(x, t) = \rho u v(x, t) = -k \rho u^2 \xi_0 \cos k(x - ut) = -YS(x, t).$$

c) A hasáb közepe nem tud elmozdulni, így $g(b/2) \equiv 0$, emiatt $B_2 = 0$. Másrészt $g(x)$ maximális értéke 1, ebből $B_1 = \pm 1$ következik.

d) A hasáb két végénél a nyomás (és ezzel együtt a deformáció is) minden pillanatban nulla. Ez akkor teljesül, ha a hasáb szélei (a nyitott végű csövekben kialakuló hanghullámokhoz hasonlóan) az állóhullám duzzadóhelyei. Eszerint a legnagyobb lehetséges hullámhossz a hasáb b hosszának kétszerese, a megfelelő frekvencia pedig

$$f_1 = \frac{u}{2b} = 273 \text{ kHz}.$$

A második legkisebb frekvencia (ami annak felel meg, hogy a hasáb hossza a félhullámhossz háromszorosa):

$$f_2 = 3f_1 = \frac{3u}{2b} = 819 \text{ kHz}.$$

e) A piezoelektromos hatást leíró egyik egyenletből kifejezhetjük a mechanikai feszültséget:

$$(5) \quad T = (S - d_p E) Y,$$

majd ezt a másik egyenletbe helyettesítve az elektromos töltéssűrűsége

$$(6) \quad \sigma = d_p Y \cdot S + (\varepsilon_T - d_p^2 Y) E$$

adódik. Az elektromos térerősséget a megadott elektromos feszültségből számíthatjuk:

$$(7) \quad E(x, t) = \frac{U(t)}{h} = \frac{U_m \cos \omega t}{h}.$$

Mivel E időfüggése $\cos \omega t$ alakú, feltehetjük, hogy a hasáb S deformációja is így változik időben, vagyis

$$(8) \quad \xi(x, t) = \xi_m \sin k \left(x - \frac{b}{2} \right) \cdot \cos \omega t,$$

$$(9) \quad S(x, t) = k \xi_m \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) \cdot \cos \omega t.$$

Helyettesítsük (7)-et és (9)-et az (5) egyenletbe, és használjuk ki, hogy a hasáb széleinél (pl. $x = 0$ -nál) a mechanikai feszültség nulla. Innen a rezgés amplitúdójára

$$\xi_m = \frac{d_p U_m}{hk \cos(kb/2)}$$

adódik, (6)-ból pedig leolvashatjuk, hogy a kérdéses együtthatók:

$$D_1 = \frac{d_p^2 Y}{\cos(kb/2)} \quad \text{és} \quad D_2 = \varepsilon_T - d_p^2 Y.$$

f) Az előző pontban kiszámított felületi töltéssűrűséget x szerint integrálva megkapjuk a hasáb egyik kontaktusán levő teljes töltést:

$$Q(t) = w \int_0^b \sigma(x, t) dx = C_0 \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{2}{kb} \operatorname{tg} \frac{kb}{2} - 1 \right) \right] U(t),$$

ahol $C_0 = \varepsilon_T bw/h$ a hasáb (mint w széles, b hosszú és h vastagságú síkkondenzátor) alacsony frekvenciákon ($\omega = ku \approx 0$) érvényes kapacitása, és

$$\alpha^2 = \frac{Y d_p^2}{\varepsilon_T} = 9,82 \cdot 10^{-3},$$

az ún. *elektromechanikus csatolási állandó* négyzete.

3.A feladat. Neutrínótömeg és neutronbomlás

a) Jelöljük az egyes részecskék (relativisztikus) energiáját E -vel, impulzusvektorát pedig $\mathbf{q}$ -val, és mindegyiket lássuk el a részecske típusára utaló (p, n, e, illetve az antineutrínót ν) indexszel! Használjunk olyan egységrendszert, amelyben a fénysebesség egységnyi (ebben a tömeget, az energiát és az impulzust egyaránt MeV-ban mérhetjük.)

A bomlási folyamat során az energiák összege és az impulzusok összege változatlan marad (ezek megmaradó mennyiségek):

$$(1) \quad E_n = E_p + E_e + E_\nu,$$

$$(2) \quad \mathbf{q}_n = \mathbf{q}_p + \mathbf{q}_e + \mathbf{q}_\nu.$$

Az egyes részecskék energiája és impulzusa összefügg egymással:

$$(3) \quad E_i^2 - \mathbf{q}_i^2 = m_i^2 \quad (i = n, p, e, \nu),$$

amint az a megfelelő $\mathbf{v}_i$ sebességgel felírt

$$E_i = \frac{m_i}{\sqrt{1 - v_i^2}}, \quad \mathbf{q}_i = \frac{m_i \mathbf{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2}}$$

formulákból könnyen leolvasható.

Képzeld el, hogy a vizsgálandó $n \rightarrow p + e + \nu$ bomlási folyamat két lépésben megy végbe: a neutron először elbomlik egy elektronra és egy x jelű részecskére, majd az x részecske elbomlik protonra és antineutrínóra:

$$n \rightarrow e + x \quad \text{majd} \quad x \rightarrow p + \nu.$$

(A megmaradási törvények szempontjából lényegtelen, hogy a folyamat ténylegesen így zajlik-e le, vagy pedig egyszerre, egyetlen pillanatban történik a neutron bomlása; a feladatban szereplő kérdésre azonban könnyebb választ adni, ha lépcsőzetesnek gondoljuk a bomlást.)

Írjuk fel a bomlás első részére a megmaradási törvényeket abban a koordináta-rendszerben, amelyben a neutron áll (azaz ahol $\mathbf{q}_n = 0$ és $E_n = m_n$). Az impulzusmegmaradás törvénye miatt az elektron és az x részecske impulzusa ugyanakkora nagyságú (de ellentétes irányú), az energiamegmaradást tehát így fogalmazhatjuk meg:

$$(4) \quad m_n = E_e + E_x,$$

ahol

$$(6) \quad E_e^2 - m_e^2 (= q_e^2 = q_x^2) = E_x^2 - m_x^2.$$

Fejezzük ki (5)-ből E_x -t és helyettesítsük be (6)-ba, majd a kapott összefüggésből határozzuk meg az elektron energiáját. Az eredmény:

$$(7) \quad E_e^2 = \frac{m_n^2 + m_e^2 - m_x^2}{2m_n^2}.$$

Látható, hogy a bomlás során keletkező elektronnak annál nagyobb lesz az energiája, minél kisebb a bomlás másik termékének (az x részecskének) a tömege.

Mekkora lehet m_x legkisebb értéke? Erre a kérdésre legkönnyebben az x részecske nyugalmi rendszerében kaphatjuk meg a választ. Mivel x egy protonra és egy antineutrínóra bomlik, fennáll, hogy

$$(8) \quad m_x = E'_p + E'_\nu \geq m_p + m_\nu = m_x^{\min}.$$

(A vessző arra utal, hogy ezeket a mennyiségeket nem a laboratóriumi koordináta-rendszerben számítottuk ki, hanem az x részecske nyugalmi rendszerében.

A (8) egyenlőtlenség akkor válik egyenlőséggé, amikor a proton és az antineutrínó egymáshoz képest nem mozog, tehát a laboratóriumi rendszerből nézve a sebességük megegyezik. Ebben a határesetben (7) alapján

$$E_e^{\max} = \frac{m_n^2 + m_e^2 - (m_x^{\min})^2}{2m_n^2} = \frac{m_n^2 + m_e^2 - (m_p + m_\nu)^2}{2m_n^2},$$

amelynek numerikus értéke $1,292\,569 \text{ MeV} \approx 1,29 \text{ MeV}$.

Az antineutrínó (és vele egyezően a proton) sebessége az x részecske (labor rendszerbeli) sebességével egyezik meg, ami így adható meg:

$$v_m = \frac{\sqrt{(m_n + m_e + m_x)(m_n + m_e + m_x)(m_n + m_e - m_x)(m_n - m_e + m_x)}}{m_n^2 - m_e^2 - m_x^2},$$

ahol most is $m_x = m_p + m_\nu$. Numerikusan (fénysebességi egységekben mérve) $v_m = 0,001\,265\,38 \approx 0,001\,27$.

3.B feladat. Lebegtetés fényvel

A függőlegesen felfelé haladó fénysugarak (fotonok) – amikor az üvegen áthaladnak – irányt változtatnak, és emiatt a lendületük (impulzusuk) függőleges komponense lecsökken. Az egységnyi idő alatt „leadott impulzus” a félgömbre ható fény-nyomóerővel egyenlő, és ha ez az erő éppen egyenlő az üveg súlyával, akkor a test lebeghet. Kövessük végig mindezt számítással is!

b) Tekintsük a lézerfény-nyaláb azon részét, amelynek az optikai tengelytől mért távolsága x és $x + \Delta x$ közé esik (ahol $\Delta x \ll x$). Ebbe a tartományba a lézer teljes P teljesítményének csak egy kis hányada, a területek arányának megfelelően

$$\Delta P = \frac{2\pi x \Delta x}{\delta^2 \pi} P$$

érkezik, vagyis a kérdéses tartományba egységnyi idő alatt

$$\Delta n = \frac{\Delta P}{hf} = \frac{2xP}{\delta^2 hf} \Delta x$$

számú (egyenként hf energiával rendelkező) foton érkezik. (Itt f a lézerfény frekvenciája, h pedig a Planck-állandó.)

A fénysugarak irányváltozása szempontjából célszerű az üveg félgömb középső (az optikai tengelyhez közeli) tartományát gondolatban két részre bontani: egy planparalel lemezre (amely a rá merőlegesen eső fénysugarakat nem töri meg) és egy síkdomború vékony lencsére, amelynek $f_0 = \frac{R}{n-1}$ a fókusz-távolsága. Ez utóbbi $\theta \approx \tan \theta = \frac{x}{f_0} = \frac{x}{R}(n-1)$

szöggel téríti el a fotonokat, azok kezdeti $I = \frac{hf}{c}$ impulzusa tehát

$$\Delta I = \frac{hf}{c}(1 - \cos \theta) = \frac{hf}{c} 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \approx \frac{hf}{c} \frac{\theta^2}{2} \approx \frac{hf}{c} \frac{x^2(n-1)^2}{2R^2}$$

értékkel lecsökken (c a fénysebesség vákuumban). A teljes impulzusváltozás az egyes fotonok impulzusváltozásának összege:

$$I = \sum \Delta n \Delta I = \sum \frac{2xP}{\delta^2 hf} \Delta x \cdot \frac{hf}{c} \frac{x^2(n-1)^2}{2R^2} = \frac{P(n-1)^2}{\delta^2 c R^2} \sum x^3 \Delta x.$$

A legutolsó kifejezésben szereplő összeg a felosztás finomításával (Δx egyre kisebb tételével) egy integrálba megy át:

$$\sum x^3 \Delta x \rightarrow \int_0^\delta x^3 dx = \frac{\delta^4}{4},$$

így az egyensúly feltétele $I = \frac{P(n-1)^2 \delta^2}{4cR^2} = mg$, ahonnan a kérdéses lézerteljesítmény:

$$P = \frac{4mgcR^2}{(n-1)^2 \delta^2}.$$