



A 34. Nemzetközi Fizikai Diákolimpia elméleti feladatai¹

1. feladat. Inga, melynek felső végét is egy súly húzhatja

Egy R sugarú merev rudat a talaj felett bizonyos magasságban vízszintes helyzetben rögzítettünk. Egy elhanyagolható tömegű, L hosszúságú ($L > 2\pi R$) fonál egyik végét az 1. ábrán látható módon a rúd legfelső, A pontjában rögzítettük, a másik végére m tömegű pontszerűnek tekinthető testet erősítve ingát készítettünk. A fonalat feszesen tartva az inga nehezékét az A ponttal azonos magasságba emeljük, majd onnan kezdősebesség nélkül elengedjük. A fonalat kezdetben feszültségmentesnek tekinthetjük, és feltehetjük, hogy az ingatest a rúd tengelyére merőleges síkban mozog. A továbbiakban az ingatestet részecskének fogjuk nevezni. A nehézségi gyorsulás g .

¹A részpontoszámokat azok kedvéért közöljük, akik – későbbi versenyekre készülve – az olimpiához hasonló feltételek mellett önállóan akarják megoldani a feladatokat. A „hivatalos” megoldást és a mérési feladatot a KöMaL novemberi számában ismertetjük.

A feladatok kidolgozására 5 óra állt rendelkezésre.

1. ábra

Legyen O a koordináta-rendszerünk origója! Amikor a részecske a P pontban van, a fonál a hengerfelület Q pontbeli érintőjével egyirányú. A QP szakasz hosszát s -sel jelöljük. A Q pontbeli érintő irányú egységvektort jelölje $\hat{\mathbf{t}}$, a sugár irányú egységvektort pedig $\hat{\mathbf{r}}$. Az OQ sugár szögelfordulása θ , melyet az OA függőleges x tengelytől az óramutató járásával ellentétes irányban tekintjük pozitívnak.

Amikor $\theta = 0$, az s távolság nagysága L , és a részecske gravitációs potenciális energiája, U legyen nulla. A részecske

mozgása során az időben változó θ és s mennyiségek változási sebességét jelölje $\dot{\theta}$ és \dot{s} . Hacsak nem jelezzük másként, valamennyi sebességet a rögzített O pontra vonatkoztatjuk.

A. Ebben a részben a részecske mozgása során a fonál végig feszes marad. A fentebb bevezetett mennyiségek (vagyis s , θ , \dot{s} , $\dot{\theta}$, R , L , g , $\hat{\mathbf{t}}$ és $\hat{\mathbf{r}}$) segítségével fejezzük ki:

- $\dot{\theta}$ és \dot{s} közötti kapcsolatot (*0,5 pont*).
- A mozgó Q pont O ponthoz viszonyított sebességvektorát (*0,5 pont*).
- A P pontban levő részecske Q ponthoz viszonyított \mathbf{v}_Q sebességvektorát (*0,7 pont*).
- A P pontban levő részecske \mathbf{v} sebességvektorát az O ponthoz viszonyítva (*0,7 pont*).
- A P pontban levő részecske O pontra vonatkoztatott gyorsulásának komponensét (*0,7 pont*).
- A P pontban levő részecske U gravitációs potenciális energiáját (*0,5 pont*).
- A részecske sebességének v_m nagyságát a pályájának legalacsonyabb pontjában (*0,7 pont*).

B. Ebben a részben az L és R mennyiségek aránya legyen

$$\frac{L}{R} = \frac{9\pi}{8} + \frac{2}{3} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{16} \approx 6,886.$$

h) Adjuk meg a részecske sebességének nagyságát (g és R függvényében) abban a helyzetben, amikor a QP fonalhossz a legrövidebb, de a fonal még nem lazult meg (*2,4 pont*).

i) Mekkora a rúd túlsó oldalára átlendült részecske sebessége (g és R függvényében) a pályájának ottani legmagasabb, H pontjában (*1,9 pont*)?

C. Ebben a részben az m tömegű nehezebbel rendelkező inga fonálának felső végét nem rögzítjük az A ponthoz, hanem a fonalat a rúd tetején átvetve a végét egy nehezebb, M tömegű súlyhoz kapcsoljuk, az *2. ábrán* látható módon. A súly ugyancsak pontszerűnek tekinthető. Kezdetben az ingatestet az A ponttal azonos magasságban tartjuk, a másik oldalon a súly az O pontnál mélyebben helyezkedik el, a fonál feszes, és a vízszintes részének hossza L . Ezután az ingatestet kezdősebesség nélkül elengedjük, és a súly is süllyedni kezd. Feltehetjük, hogy az ingatest mindvégig egy függőleges síkban mozog, és át tud lendülni a lefelé mozgó súly mellett, anélkül, hogy egymás mozgását megzavarnák. A rúd felülete és a fonal közötti csúszási súrlódás elhanyagolható, a tapadó súrlódásról viszont feltesszük, hogy az elegendően nagy, és emiatt az egyszer megálló súly nem tud ismét megmozdulni, nyugalomban kell maradjon.

2. ábra

j) Tegyük fel, hogy a súly D nagyságú függőleges elmozdulás után valóban megáll, és hogy $(L - D) \gg R$. Ahhoz, hogy az ingatest a rúd körül teljesen körbefordulhasson, vagyis $\theta = 2\pi$ lehessen, még hozzá úgy, hogy a fonál mindkét ága egyenes maradjon, az szükséges, hogy az $\alpha = D/L$ hosszúságarány ne legyen kisebb egy bizonyos kritikus α_k értéknél.

Elhanyagolva az R/L nagyságrendű, vagy ennek magasabb hatványait tartalmazó kicsiny tagokat, adjunk becslést α_k nagyságára az M/m tömegarányval kifejezve (3,4 pont)!

2. feladat. Piezoelektromos kristályrezonátor elektromos váltófeszültséggel

Tekintsünk egy homogén, A keresztmetszetű rudat, melynek mechanikai feszültségektől mentes állapotban a hossza ℓ (3. ábra).

3. ábra

Ha a rúd két végén azonos nagyságú, de ellentétes irányú, a felületre merőleges F erő hat, a rúd hossza $\Delta\ell$ -el megváltozik. A T mechanikai feszültséget a rúd végein az F/A képlet definiálja. A rúd hosszának relatív megváltozását, azaz $\Delta\ell/\ell$ -t deformációnak nevezzük, és S -sel jelöljük. A mechanikai feszültség és a deformáció segítségével a Hooke-törvényt a következő alakban is felírhatjuk:

$$(1) \quad T = Y S \quad \text{vagy} \quad \frac{F}{A} = Y \frac{\Delta\ell}{\ell},$$

ahol Y a rúd anyagának *Young-modulusa*. Jegyezzük meg, hogy T nyomó feszültség, ha $F < 0$ és a rúd hossza csökken (azaz $\Delta\ell < 0$). Az ilyen feszültség tehát negatív, és értéke a p nyomás (-1) -szerese: $T = -p$. Egy homogén, ρ sűrűségű rúdban a longitudinális hullámok terjedési sebessége (azaz a hangsebesség) a következő képlettel adható meg:

$$(2) \quad u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}.$$

(A feladat megoldása során minden csillapítás és elnyelődés elhanyagolható.)

A. Mechanikai tulajdonságok

Egy homogén, egyik irányban végtelen rúd (kiterjedése $x = 0$ -tól ∞ -ig tart), sűrűsége ρ . A rúd kezdetben nyugalomban van és feszültségmentes. A rúd bal felületére az $x = 0$ helyen egy nagyon rövid Δt ideig állandó, kicsiny p nyomás hat, és ezzel elindít egy u sebességgel jobbra haladó nyomáshullámot (4. ábra).

4. ábra

a) Mekkora ez alatt a Δt idő alatt az S deformáció és a p nyomás a rúd bal oldali felületénél, ha a dugattyú a rúd bal oldali felületét állandó v sebességgel mozgatja (4. ábra)? A választ ρ , u és v függvényében kell megadni (1,6 pont)!

5. ábra

b) Tekintsünk egy longitudinális hullámot, amely x irányban terjed a rúdban! Jelöljük a rúd feszültségmentes állapotában x helyen levő keresztmetszetének t időpontbeli elmozdulását $\xi(x, t)$ -vel (5. ábra), és tételezzük fel, hogy

$$(3) \quad \xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x - ut),$$

ahol ξ_0 és k állandók. Határozd meg a megfelelő $v(x, t)$ sebességet, $S(x, t)$ deformációt és $p(x, t)$ nyomást x és t függvényében (2,4 pont)!

B. Elektromechanikai tulajdonságok (beleértve a piezoelektromos hatást)

Tekintsünk egy hasáb alakú kvarckristályt, amelynek hossza b , vastagsága h és szélessége w (6. ábra)! A hossza x tengely irányú, vastagsága pedig z tengely irányú. Az alsó és a felső felületén vékony fémbevonat segítségével elektromos kontaktusokat alakítottak ki. Az elektromos vezetékek, amelyek egyben tartószerkezetként is szolgálnak (7. ábra) a kontaktusok közepére vannak forrasztva, ezért az x irányú longitudinális rezgések során ezek a pontok nyugalomban kell maradjanak.

6. ábra

7. ábra

A vizsgált kvarckristály sűrűsége $\rho = 2,65 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, Young-modulusa pedig $Y = 7,87 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$. A hasáb hossza $b = 1,00 \text{ cm}$, a w szélességre és a h vastagságra pedig $h \ll w \ll b$ teljesül. A K kapcsoló nyitva van, és feltételezzük, hogy csak x irányú longitudinális módusú állóhullámok gerjesztődnek a kvarc hasáiban.

Egy $f = \omega/(2\pi)$ frekvenciájú állóhullámban a $\xi(x, t)$ elmozdulás a következő alakba írható:

$$(4a) \quad \xi(x, t) = 2\xi_0 g(x) \cos \omega t, \quad (0 \leq x \leq b),$$

ahol ξ_0 egy pozitív konstans, a $g(x)$ helyfüggő tényező

$$(4b) \quad g(x) = B_1 \sin k \left(x - \frac{b}{2} \right) + B_2 \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right)$$

alakú, $g(x)$ maximális értéke 1 és $k = \omega/u$. Ne felejtse el, hogy az elektromos kontaktusok közepe nyugalomban van, és hogy a hasáb bal és jobb vége szabad, a mechanikai feszültség (vagy a nyomás) értéke ezeken a helyeken nulla kell legyen!

c) Határozd meg a (4b) képletben szereplő B_1 és B_2 állandók értékét, ha a kvarc hasábjában egy longitudinális állóhullám alakul ki (1,2 pont)!

d) Mekkora az a két legkisebb frekvencia, amelyen longitudinális állóhullám gerjeszthető a kvarc hasábjában (1,2 pont)?

A *piezoelektromos hatás* a kvarckristály speciális tulajdonsága. A kristály összenyomása vagy megnyújtása elektromos feszültséget hoz létre a kristályban, és fordítva, a kristályra kapcsolt külső elektromos feszültség vagy megnyúlást, vagy összehúzódást okoz, a polaritástól függően. Így a mechanikai és az elektromos rezgések csatolódhatnak és rezonálhatnak a kvarckristályban.

Legyen a felső és az alsó elektromos kontaktus elektromos töltéssűrűsége $-\sigma$, illetve $+\sigma$, ha a kvarc hasábjában E nagyságú, z irányú elektromos tér van! Jelölje a hasáb x irányú deformációját és mechanikai feszültségét S , illetve T ! Ekkor a piezoelektromos hatás a kvarckristályban a következő egyenletrendszerrel írható le:

$$(5a) \quad S = (1/Y)T + d_p E,$$

$$(5b) \quad \sigma = d_p T + \varepsilon_T E,$$

ahol $1/Y = 1,27 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2/\text{N}$ a Young-modulus reciproka állandó elektromos tér esetén, $\varepsilon_T = 4,06 \cdot 10^{-11} \text{ F/m}$ a dielektromos állandó konstans mechanikai feszültség esetén, $d_p = 2,25 \cdot 10^{-12} \text{ m/V}$ pedig a piezoelektromos együttható.

Legyen most a θ . ábrán látható K kapcsoló zárva! Ekkor $U(t) = U_m \cos \omega t$ elektromos váltófeszültség jelenik meg a kontaktusokon, és a kvarc hasábjában homogén, $E(t) = U(t)/h$ nagyságú, z irányú elektromos tér keletkezik. Az állandósult állapot kialakulása után a hasábjában egy x irányú, ω körfrekvenciájú longitudinális állóhullám figyelhető meg.

Mivel E homogén, a λ hullámhossz és a hasábjában lévő állóhullámok f frekvenciája között továbbra is érvényes a $\lambda = u/f$ összefüggés, ahol u értékét a (2) egyenlet adja meg. A $T = YS$ összefüggés azonban most már nem érvényes, mint ahogy azt az (5a) egyenlet is mutatja. Ugyanakkor a deformáció és a mechanikai feszültség definíciója változatlan, a hasáb végei pedig továbbra is szabadok, nulla mechanikai feszültséggel.

e) Az (5a) és az (5b) egyenletek figyelembevételével a σ felületi töltéssűrűség az alsó elektromos kontaktuson x és t függvényében

$$\sigma(x, t) = \left[D_1 \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) + D_2 \right] \frac{U(t)}{h}$$

alakú lesz, ahol $k = \omega/u$. Vezesse le a fenti D_1 és D_2 mennyiségeket megadó összefüggéseket (2,2 pont)!

f) Az alsó kontaktuson lévő teljes $Q(t)$ elektromos töltés az $U(t)$ feszültségtől a

$$Q(t) = \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{2}{kb} \operatorname{tg} \frac{kb}{2} - 1 \right) \right] C_0 U(t).$$

képlet szerint függ. Vezesse le a kifejezésben szereplő C_0 és α^2 mennyiségeket megadó összefüggéseket, valamint α^2 numerikus értékét (1,4 pont)!

3. feladat.²

A rész: Neutrínótömeg és neutronbomlás

Egy m_n nyugalmi tömegű, a laboratóriumi koordináta-rendszerben álló, szabad neutron el tud bomlani három, egymással kölcsönhatásban nem álló részecskére: egy protonra, egy elektronra és egy antineutrínóra. A proton nyugalmi tömege m_p , az antineutrínó m_ν nyugalmi tömegéről pedig feltesszük, hogy nem nulla, de sokkal kisebb, mint az elektron m_e nyugalmi tömege. A vákuumbeli fénysebességet jelölje c . A mért értékek a következők:

$$m_n = 939,565 63 \text{ MeV}/c^2, \quad m_p = 938,272 31 \text{ MeV}/c^2, \quad m_e = 0,510 990 7 \text{ MeV}/c^2.$$

A továbbiakban minden energia és sebesség a laboratóriumi rendszerben értendő. Legyen a bomlás során keletkező elektron teljes energiája E .

a) Határozd meg az E energia legnagyobb lehetséges E_{\max} értékét és az antineutrínó v_m sebességét abban az esetben, amikor $E = E_{\max}$! Mindkét választ a részecskék nyugalmi tömegei és a fénysebesség segítségével kell megadni. Felhasználva, hogy $m_\nu < 7,3 \text{ eV}/c^2$, számítsd ki numerikusan E_{\max} és v_m/c értékét 3 értékes tizedesjegy pontossággal (4 pont)!

²Ez a feladat két független részből áll.

B rész: Lebegtetés fényel

Egy R sugarú, m tömegű átlátszó üveg félgömb törésmutatója n . A félgömbön kívül a közeg törésmutatója 1-gyel egyenlő. A félgömb sík lapjának középső részére, a felületre merőlegesen egyenletes eloszlású monokromatikus, párhuzamos lézernyaláb esik, a *8. ábrán* látható módon. A nehézségi gyorsulás \mathbf{g} , függőlegesen lefelé mutat. A kör keresztmetszetű lézernyaláb δ sugara sokkal kisebb, mint R . Mind az üveg félgömb, mind pedig a lézernyaláb a z tengelyre nézve hengersizmetrikus.

8. ábra

Az üveg félgömb semennyit nem nyel el a lézerefényből. A felületét egy átlátszó anyag megfelelő vékonyrétegével vonták be, oly módon, hogy az üvegbe belépő és az onnan kilépő fény visszaverődése elhanyagolhatóan kicsi legyen. A visszaverődésmentes felületi rétegen áthaladó lézerefény optikai úthossza ugyancsak elhanyagolható.

b) Elhanyagolva a $(\delta/R)^3$ és még magasabb hatványú tagokat, határozd meg, hogy mekkora P lézerteljesítmény szükséges az üveg félgömb súlyának kiegyensúlyozásához (4 pont)!

Útmutatás: $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$, ha $\theta \ll 1$.