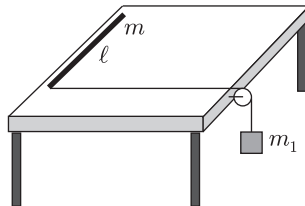


Holics László

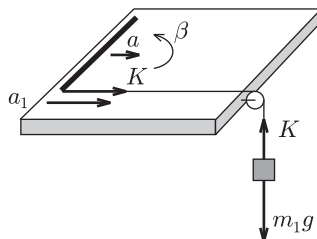
I. kategória

1. feladat. Vízszintes asztalra ℓ hosszúságú, m tömegű homogén lécet fektetünk. A lécek egyik végéhez a lécre merőleges helyzetű, csigán átvett fonalat erősítünk, amelyre m_1 tömegű nehezéket akasztunk. A csiga tömege és a súrlódás mindenhol elhanyagolható.



1. ábra

a) A lécek melyik pontjának nem lesz gyorsulása a nehezék elengedésének pillanatában?



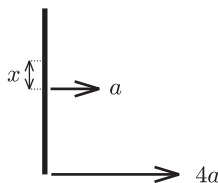
2. ábra

b) Milyen tömegaránynál lesz a lécek középpontjának gyorsulása maximális a nehezék elengedésének pillanatában? Mekkora ez a gyorsulás? () (Jurisits József)

Megoldás. a) A középpont gyorsulását a -val, a kerületi pont gyorsulását a_1 -gyel, a szöggyorsulást β -val jelölve a kezdeti pillanatban a következő összefüggések érvényesek:

$$\begin{aligned} m_1 g - K &= m_1 a, & K &= m a, \\ K \cdot \frac{\ell}{2} &= \frac{1}{12} m \ell^2 \cdot \beta, & \beta \cdot \frac{\ell}{2} &= a_1 - a. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldásából



3. ábra

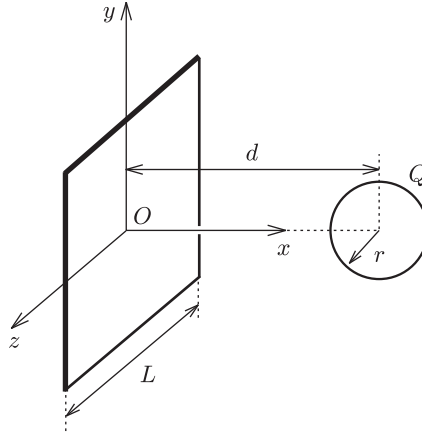
$$a = \frac{g}{4 + \frac{m}{m_1}}, \quad a_1 = 4a, \quad \beta = \frac{6a}{\ell}.$$

A középpont túlsó oldalán lévő pontok tangenciális gyorsulása hátrafelé irányul. A középponttól x távolságra lévő pontnak akkor nincs gyorsulása, ha a tangenciális gyorsulás egyenlő nagyságú a középpont gyorsulásával:

$$x \cdot \beta = a, \quad \text{ahonnan} \quad x = \frac{\ell}{6}.$$

b) A középpont korábban kiszámított gyorsulása $m \ll m_1$ esetén a legnagyobb, nevezetesen

$$a_{\max} = \frac{g}{4}.$$



4. ábra

2. feladat. Egy L oldalú, elhanyagolható vastagságú, nagy, négyzetes szigetelő lemez $100\,Q$ töltéssel egyenletesen fel van töltve. Legyen a lemez síkja az x - y sík! Egy r sugarú, Q töltéssel egyenletesen töltött vékonyfalú, belül üres szigetelő gömb középpontja a síkkal szemben a $(d, 0, 0)$ pontban helyezkedik el. Számítsuk ki az elektromos térerősséget a gömb belső pontjaiban és a $(d/2, d/2, 0)$ pontban! Legyen $L = 100\,d$ és $r = d/5$. Az eredményt Q , d és az ε_0 dielektromos állandó kifejezéseiként adjuk meg!

()

(Varga Zsuzsa)

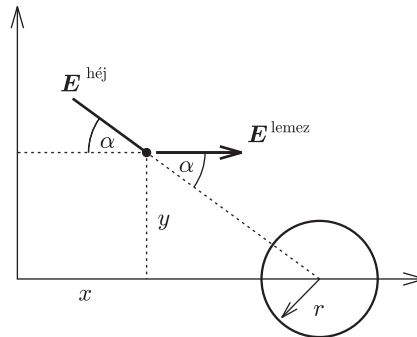
Megoldás. A lemeztől származó térerősség a Gauss-törvény alapján

$$E_x^{\text{lemez}} = 5 \cdot 10^{-3} \frac{Q}{\varepsilon_0 d^2}, \quad (x > 0), \quad E_y^{\text{lemez}} = 0.$$

A feltöltött gömb által létrehozott elektromos mező a gömb belsejében nulla, rajta kívül pedig olyan, mintha egy Q nagyságú ponttöltés lenne a gömb középpontjában (Gauss-törvény).

a) A gömb belső pontjaiban az eredő térerősség:

$$E_x = 5 \cdot 10^{-3} \frac{Q}{\varepsilon_0 d^2}, \quad E_y = 0, \quad E_z = 0.$$



5. ábra

b) A gömbön kívül a kérdéses pontban az eredő térerősség:

$$E_x = E_x^{\text{lemez}} - E_x^{\text{héj}} \cdot \cos 45^\circ = -0,107 \frac{Q}{\varepsilon_0 d^2},$$

$$E_y = E_y^{\text{héj}} \cdot \sin 45^\circ = -0,113 \frac{Q}{\varepsilon_0 d^2}.$$

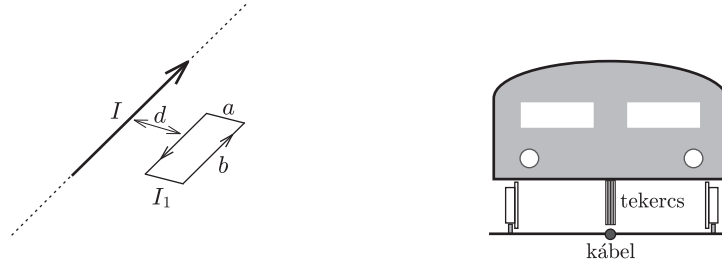
Ez a vektor

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 0,156 \frac{Q}{\varepsilon_0 d^2}$$

nagyságú, és a negatív x tengellyel $46,6^\circ$ -os szöget zár be.

3. feladat. Egy merev, téglalap alakú vezető hurok síkjában a hosszabbik oldallal párhuzamosan nagyon hosszú, $10\,\text{A}$ erősségű áramot szállító egyenes vezeték helyezkedik el. A téglalap oldalai $a = 0,2\,\text{m}$, $b = 0,3\,\text{m}$, a benne folyó

áram erőssége 1 A. Az egyenes vezeték a huroktól 0,25 m távolságra van. Határozzuk meg a keretre ható eredő erő irányát és nagyságát!



6. ábra

Ez az elrendezés használatos az ún. mágneses lebegtetésű vonat megvalósításánál. Sok-sok függőleges síkú hurok (egy négyszögletes tekercs) van elhelyezve minden kocsi-ban pontosan a vágány közepén futó kábel felett. A kocsi és a tekercs azonos b hosszúságú. A kocsi egységnyi hosszra eső tömege m kg/m. Ha $d = 1$ cm, $m = 100$ kg/m és a vágánybeli kábel és a tekercs árama egyaránt 100 A, hány menetesnek kell lennie a tekercsnek, ha $a \gg d$?

()

(Varga Zsuzsa)

Megoldás. A mágneses indukció nagysága az egyenes vezetőtől x távolságban (a rajz síkjába befelé)

$$B(x) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{x}.$$

A téglalap alakú vezető hurok egyes darabkaira ható erő az $\mathbf{F} = I_1 \mathbf{l} \times \mathbf{B}$ képlet alapján számítható. A BA és a DC szakaszokon ható erők kiejtik egymást, így

$$F^{\text{eredő}} = F_{AD} - F_{CB} = \frac{\mu_0}{2\pi} I I_1 b \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+a} \right) = 1,067 \cdot 10^{-6} \text{ N}.$$

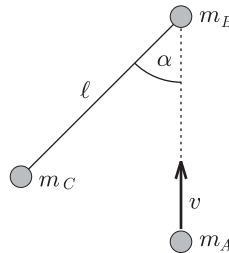
Az N menetes tekercset tartalmazó vonat lebeg a sínen, ha (kihasználva, hogy $a \gg d$)

$$mgb = NF^{\text{eredő}} \approx \frac{N\mu_0 I I_1 b}{2\pi d}.$$

Ebből a megadott számadatokkal $N \approx 500$ menet adódik.

II. kategória

1. feladat. Három azonos tömegű és méretű ($m_A = m_B = m_C = m$) lapos korong nyugszik vízszintes síma lapon. A B és C korong vékony, $\ell = 1$ m hosszú fonállal van összekötve. A fonál kezdetben laza, de egyenes, iránya 45° -os szöget zár be az A és B korongok közepét összekötő egyenessel. Az A korongot $v = 2$ m/s sebességgel meglökjük úgy, hogy a B koronggal centrálisan ütközzön. Az ütközések abszolút rugalmasak és pillanatszerűek.

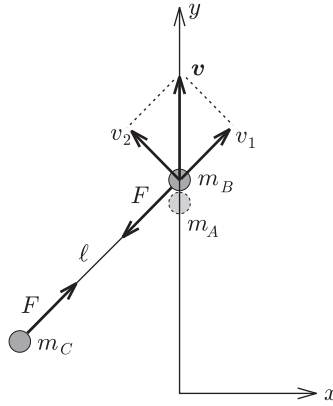


7. ábra

Az A és B korongok ütközésétől számítva mennyi idő múlva lesz a B és C korongok középpontját összekötő egyenes párhuzamos az A korong pályájával? Milyen távol lesz ekkor az A korongtól a B és C korong? (Tekintsük a korongokat pontszerűeknek!)

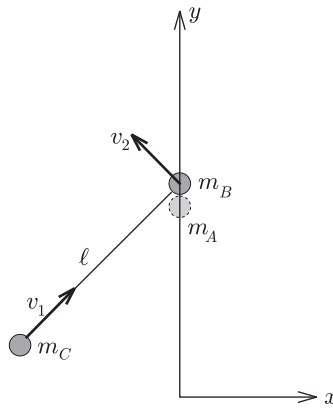
()

(Holics László)



8. ábra

Megoldás. A folyamatban két rugalmas ütközés megy végbe. Az első ütközés során (tömegük egyenlősége miatt) az A és B korongok „sebességet cserélnek”, az A korong megáll, B pedig v sebességgel megindul.



9. ábra

Vizsgáljuk a B és C korongból álló rendszer további mozgását! A második rugalmas ütközés akkor következik be, amikor a fonál hirtelen megfeszül, és megrántja a végeihez kötött két korongot; egyenlő F nagyságú, de ellentétes irányú erőlkést adva nekik. Ez az erőlkés a fonálra merőleges sebességkomponenseket nem tudja megváltoztatni (tehát a 8. ábrán látható jelölésekkel azok nagysága $v_2 = v/\sqrt{2}$ és nulla marad), a fonállal párhuzamos sebességkomponensek pedig (mivel a korongok tömege megegyezik) kicserélődnek (9. ábra). A második ütközés után tehát mindkét test sebességének nagysága ugyanakkora:

$$u_B = u_C = v \frac{\sqrt{2}}{2},$$

de a sebességük iránya egymásra merőleges. Válasszunk egy olyan koordináta-rendszert, amelynek y tengelye a $\mathbf{v}$ -vel (az A korong pályájával) párhuzamos, ebben a második ütközésben részt vevő testek sebessége az ütközés után:

$$u_{By} = -u_{Bx} = v/2,$$

illetve

$$u_{Cy} = u_{Cx} = v/2,$$

tehát mindkét test az y tengellyel 45° -os szöget bezáró irányban mozog.

A második ütközés (a fonál által kifejtett erőlkés) után a fonál azonnal meglazul, és mindkét korong erőmentesen, egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. A két korongot összekötő egyenes akkor lesz párhuzamos az y tengellyel (az A korong korábbi sebességével), amikor B is és C is megteszi $v/2$ sebességgel az $\ell\sqrt{2}/4$ nagyságú „ x irányú” távolságot. Ez a pillanat az A -val való ütközés után

$$t = \frac{\ell}{v} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,35 \text{ s}$$

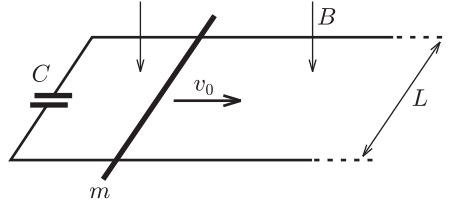
múlva következik be. Ekkor mind az A , mind pedig a B korong $\ell/2 = 0,5$ m távolságban lesz az A korongtól, egymástól mért távolságuk pedig $\ell\sqrt{2}/2 = 0,71$ m.

2. feladat. Két párhuzamos, egymástól L távolságra futó vízszintes fémsín egyik végét C kapacitású, kezdetben töltetlen kondenzátorral zárjuk le. A sín pár időben állandó, függőleges irányú, B indukciójú homogén mágneses mezőben

van. A sínparra merőlegesen egy R ellenállású, m tömegű vezető rudat fektetünk, amit v_0 sebességgel meglökünk. Mekkora sebességre lassul le a rúd, ha a sín elegendően hosszú, és a mágneses tér is kellően kiterjedt? (A sín elektromos ellenállása, a súrlódás és az önindukciós hatások elhanyagolhatók.)

()

(Szegedi Ervin)



10. ábra

Megoldás. A rúd indítását követően a mozgási indukció jelensége miatt feszültség indukálódik, indukált áram folyik, és a kondenzátor elkezd feltöltődni. A pillanatnyi áramerősséget az indukált feszültség és a kondenzátor feszültsége határozza meg:

$$Ri(t) = BLv(t) - \frac{Q(t)}{C}.$$

A mágneses térben mozgó, áramjárta rúdra fékező mágneses erő hat, ezért a rúd sebessége csökken. Ez a sebességcsökkenés mindaddig tart, amíg áram folyik, azaz amíg az indukált feszültség és a kondenzátor feszültsége „ki nem oltja” egymást:

$$(1) \quad BLv_{\min} = \frac{Q_{\max}}{C}.$$

A dinamika alaptörvénye alapján

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = -BiL,$$

ahonnan $i \Delta t = \Delta Q$ felhasználásával

$$m \Delta v = -BL \Delta Q.$$

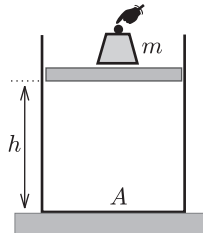
Ha az indulástól a sebesség állandósulásáig elemi részekre osztjuk a mozgást, és a fenti összefüggést minden részre felírjuk, majd azokat összegezzük

$$m(v_{\min} - v_0) = -BL \Delta Q_{\max}$$

adódik. Ebből (1) felhasználásával

$$v_{\min} = \frac{m}{m + (BL)^2 C} v_0.$$

3. feladat. Egy $A = 1 \text{ dm}^2$ alapterületű, függőlegesen álló hengerben lévő levegőt elhanyagolható tömegű, súrlódásmentesen mozgó dugattyú zár el a külső levegőtől. A levegőoszlop magassága $h = 5 \text{ dm}$. A dugattyúra óvatosan egy $m = 14 \text{ kg}$ tömegű nehezéket helyezünk, majd elengedjük azt. A dugattyú és a nehezék kis amplitúdójú, jó közelítéssel harmonikus rezgőmozgásba kezd. Határozzuk meg a rezgés amplitúdóját, frekvenciáját és a dugattyú maximális sebességét!



11. ábra

(A henger fala hőszigetelőnek tekinthető. A külső légnyomás $p_k = 100 \text{ kPa}$. Szükség esetén használjuk a következő közelítést: $(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$, ha x nullához közeli érték.)

()

(Szegedi Ervin)

Megoldás. Ha a dugattyú-teher rendszer a kiindulási helyzetből x távolsággal elmozdul lefelé, akkor a rá ható eredő erő

$$(1) \quad F(x) = mg - (p - p_k)A,$$

ahol p a levegő megnövekedett nyomása. Mivel az állapotváltozás adiabatikus, és a bezárt gáz térfogata a levegőoszlop magasságával arányos:

$$p_k \cdot h^\kappa = p \cdot (h - x)^\kappa,$$

azaz

$$(2) \quad p = p_k \left(\frac{h}{h - x} \right)^\kappa \approx p_k \left(1 + \kappa \frac{x}{h} \right).$$

(1) és (2) összevetésével a dugattyú–teher rendszerre ható eredő erő

$$F(x) = mg - \frac{\kappa A p_k}{h} x.$$

Ezt a kifejezést $F(x) = -D(x - x_0)$ alakban is írhatjuk, ahol

$$D = \frac{\kappa A p_k}{h} = 2800 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad \text{és} \quad x_0 = \frac{mgh}{\kappa A p_k} = 5 \text{ cm}.$$

Ez az erőtvény – a függőleges rugóra akasztott test példájához hasonlóan – x_0 egyensúlyi helyzet körüli harmonikus rezgőmozgást ír le. Mivel a test a rezgés szélső helyzetéből indult, a rezgés amplitúdója is x_0 , tehát 5 cm. A rezgés frekvenciája

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}} = 2,25 \text{ Hz},$$

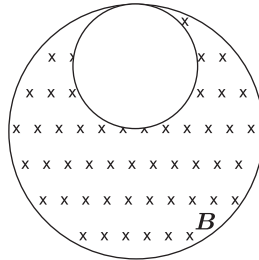
a dugattyú maximális sebessége pedig

$$v_{\max} = x_0 2\pi f = 0,71 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

III. kategória

Az **1. és 3. feladat** megegyezik a II. kategória megfelelő feladatával.

2. feladat. Egy $R = 10$ cm sugarú, hosszú henger belsejében egy vele párhuzamos tengelyű, $R/2$ sugarú kisebb henger helyezkedik el, ami belülről érinti a nagyobb hengert. A kisebb hengerben nincs mágneses mező, a nagyobb henger maradék részében időben egyenletesen változó, homogén eloszlású mágneses mező van. Az indukció változási gyorsasága $\Delta B/\Delta t = 80 \text{ V/m}^2$. A mágneses indukció párhuzamos a henger tengelyével.



12. ábra

Határozzuk meg az indukált elektromos mező térerősségét a kisebb henger belsejében! ()

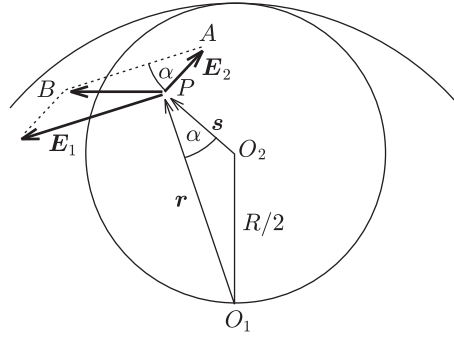
(Szegedi Ervin)

Megoldás. Ha a nagyobb hengert teljesen kitöltené a változó mágneses mező, akkor a belsejében a tengelyétől r távolságban ($r \leq R$) az indukált elektromos mező a szimmetria miatt „érintőleges”, és nagyságát az indukciótörvény határozza meg:

$$2r\pi \cdot E = \frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot r^2 \pi, \quad \text{azaz} \quad E = \frac{r}{2} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Képzeliük el, hogy a feladatban szereplő mágneses mező úgy jön létre, hogy két, időben változó mágneses mező szuperonálódik:

- (i) egy egyenletesen változó, homogén $\mathbf{B}(t)$ tér, ami a nagy hengert teljesen kitölti, és
- (ii) egy $-\mathbf{B}(t)$ -vel jellemezhető mező, ami csak a kis henger belsejében van.



13. ábra

A kis henger valamely P belső pontja legyen a nagy henger O_1 középpontjától r távolságra, a kis henger O_2 középpontjától s távolságra, és a megfelelő vektorokat jelöljük $\mathbf{r}$ -rel, illetve $\mathbf{s}$ -sel (lásd a 13. ábrát). Ekkor P -ben az indukált $\mathbf{E}$ elektromos mező két indukált térerősségből szuperponálható: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, ahol

$$E_1 = \frac{1}{2} \frac{\Delta B}{\Delta t} r \quad \mathbf{B}(t) \text{ változása miatt,}$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \frac{\Delta B}{\Delta t} s \quad -\mathbf{B}(t) \text{ változása miatt.}$$

Mivel $\mathbf{E}_1 \perp \mathbf{r}$ és $\mathbf{E}_2 \perp \mathbf{s}$, az O_2PO_1 és a PAB háromszögeknek van egy közös szöge (α). Másrészt

$$\frac{AB}{AP} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{r}{s} = \frac{O_1P}{O_2P}$$

miatt a két háromszögben az egyenlő szöveget közrefogó oldalak aránya is egyenlő, tehát a két háromszög *hasonló*. Ezért

$$\frac{BP}{AB} = \frac{E}{E_1} = \frac{O_1O_2}{O_1P} = \frac{R}{2r}, \quad \text{vagyis} \quad E = E_1 \cdot \frac{R}{2r} = \frac{R}{4} \frac{\Delta B}{\Delta t} = 2,0 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Másrészt $\mathbf{E}$ merőleges az O_1O_2 egyenesre, vagyis $\mathbf{E}$ -nek nemcsak a nagysága, de az iránya is független a P pont helyzetétől, tehát a kisebb hengerben az indukált elektromos mező *homogén*.

A verseny végeredménye

I. kategória

- Sipos Barnabás** (Budapest, Trefort Ágoston Kéttannyelvű Szki., 12. évf.),
tanára: Fülöp László;
- Szarvas Tamás** (Budapest, Puskás Tivadar Távközlési Techn., 12. évf.),
tanára: Beregszászi Zoltán;
- Mendli Bálint** (Budapest, Puskás Tivadar Távközlési Techn., 12. évf.),
tanára: Beregszászi Zoltán;

4. Juhász Gábor (Vác, Boronkay György Műszaki Szki., 12. évf.); **5. Drahos Tamás** (Miskolc, Bláthy Ottó Villamosipari Szki., 11. évf.); **6. Pszota Zsolt** (Vác, Boronkay György Műszaki Szki., 12. évf.); **7. Cserhádi Sándor** (Győr, Pattantyús Géza Ipari Szki., 12. évf.); **8. Simon Tamás** (Budapest, Puskás Tivadar Távközlési Techn., 11. évf.); **9. Varga Gábor** (Budapest, Alternatív Közgazdasági Gimn., 12. évf.); **10. Koltay Szabolcs** (Budapest, Puskás Tivadar Távközlési Techn., 12. évf.).

II. kategória

- Siroki László** (Debrecen, Fazekas Mihály Gimn., 12. évf.),
tanára: Simon Gyula;

2. Nagy Márton (Budapest, Piarista Gimn., 12. évf.),
tanárai: Futó Béla;

3. Vehovszky Balázs (Budapest, Piarista Gimn., 11. évf.),
tanára: Futó Béla;

4. Balogh László (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 11. évf.); **5. Nagy Zoltán Lóránt** (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 11. évf.); **6. Pápai Tivadar** (Barcs, Dráva Völgye Középisk., 12. évf.); **7. Tóth Sándor** (Csongrád, Batsányi János. Gimn., 11. évf.); **8. Dolgos Gergely** (Budapest, Árpád Gimn., 12. évf.); **9. Rácz Éva** (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 11. évf.); **10. Kiss Demeter** (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 11. évf.).

III. kategória

1. Pallos Péter (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 12. évf.),
tanára: Horváth Gábor;

2. Nagy Szabolcs (ELTE Trefort Ágoston Gyak. Gimn., 12. évf.),
tanára: Chikán Éva;

3. Béky Bence (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 12. évf.),
tanára: Horváth Gábor;

4. Sparing Dániel (ELTE Radnóti Miklós Gyak. Gimn., 11. évf.); **5. Szekeres Balázs** (Szolnok, Verseghegy Ferenc Gimn., 11. évf.); **6. Szilva Attila** (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 12. évf.); **7. Antal Ágnes** (ELTE Apáczai Csere János Gyak. Gimn., 12. évf.); **8. Fejős Gergely** (ELTE Radnóti Miklós Gyak. Gimn., 11. évf.); **9. Harangi Viktor** (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 12. évf.); **10. Szalai Bence** (Lovassy László Gimn., 12. évf.).