1. *Oldjuk meg a következő egyenletet és egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:*

a) $$|x-2|+|x+3|=\big|(x-2)+(x+3)\big|;$$

b) $$|x-2|+|x+3|>|2x+1|;$$

c) $$|x-2|+|x+3|<|2x+1|.$$

Megoldás. $|a|+|b|=|a+b|$ pontosan akkor teljesül, ha $ab\ge 0$; $|a|+|b|>|a+b|$ pontosan akkor teljesül, ha $ab<0$, $|a|+|b|<|a+b|$ pedig soha nem teljesül. A megoldások:
a) $(x-2)(x+3)\ge 0$, azaz $x\le -3$ vagy $x\ge 2$,
b) $(x-2)(x+3)<0$, azaz $-3<x<2$,
c) egyetlen x-re sem teljesül.

2. *Egy húrtrapéz átlói merőlegesek egymásra. A húrtrapéz területe* $16\ \mathrm{cm}^2$. *Számítsuk ki a húrtrapéz magasságának, középvonalának és átlóinak hosszát. Kiszámíthatók-e az adatokból az oldalhosszúságok?*

Megoldás. Az átlók merőlegességéből következik, hogy az átlók a párhuzamos oldalakkal $45°$-os szöget zárnak be. Így a trapéz magasságának hossza megegyezik a középvonal hosszával és az átló hossza a magasság hosszának $\sqrt{2}$-szöröse. Ha a trapéz magassága m, középvonala k, átlóinak hossza e, akkor $k=m$, $e=m\sqrt{2}$, a trapéz területe $T=m^2$. Így $m^2=16\ \mathrm{cm}^2$, $m=4$ cm, $k=4$ cm és $e=4\sqrt{2}$ cm. Végtelen sok ilyen trapéz van, így az oldalak hossza nem határozható meg.

3. *Melyek azok az* $(x;y;z)$ *számhármasok, amelyek kielégítik az* $x+y=4$, $xy=z^2+2z+5$ *egyenletrendszert?*

Megoldás. Az első egyenletből $y=4-x$, így $x(4-x)=(z+1)^2+4$,

(1) $$0=x^2-4x+4+(z+1)^2,$$

tehát $(x-2)^2+(z+1)^2=0$, ami pontosan akkor teljesül, ha $x=2$, $z=-1$ és ekkor $y=2$. Az egyenletrendszert a $(2;2;-1)$ számhármas elégíti ki.

4. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:*

$$a)\quad \left.\begin{aligned} x+y&=\frac{\pi}{2},\\ \sin x+\cos y&=\sqrt{2}.\end{aligned}\right\}\qquad\qquad b)\quad \left.\begin{aligned} 2\cos x&=\sqrt{2},\\ \sin x+\cos y&=\sqrt{2}.\end{aligned}\right\}$$

Megoldás. *a)* Az első egyenletből $y=\frac{\pi}{2}-x$, így $\cos y=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$, tehát $2\sin x=\sqrt{2}$, $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ha $x_{1,n}=\frac{\pi}{4}+2n\pi$, akkor $y_{1,n}=\frac{\pi}{4}-2n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$; ha $x_{2,k}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$, akkor $y_{2,k}=-\frac{\pi}{4}-2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

b) Az első egyenletből $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ vagy $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Ha $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, akkor $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, így $\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=\frac{\pi}{4}+2n\pi$, vagy $y=-\frac{\pi}{4}+2n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$. Ekkor a megoldások: $x_{1,k}=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $y_{1,n}=\frac{\pi}{4}+2n\pi$, vagy $x_{2,k}=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $y_{2,n}=-\frac{\pi}{4}+2n\pi$, $k,n\in\mathbb{Z}$. Ha $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$, akkor $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos y=\sqrt{2}$, tehát ekkor nincs megoldás.

5. *Az első* n, 3*-mal osztva* 2 *maradékot adó szám összegét osszuk el az első* n, 4*-gyel osztva* 1 *maradékot adó szám összegével. Mekkora* n, *ha a hányados* $\frac{8}{9}$*?*

Megoldás. Az n-edik pozitív egész szám, amelyik 3-mal osztva 2-t, illetve 4-gyel osztva 1-et ad maradékul, a $3n-1$, illetve a $4n-3$. Az első n ilyen szám összege $\frac{2+(3n-1)}{2}\cdot n$, illetve $\frac{1+(4n-3)}{2}\cdot n$, a hányadosuk $\frac{3n+1}{4n-2}$. A feltétel szerint

$$\frac{3n+1}{4n-2}=\frac{8}{9},\quad\text{tehát}\quad n=5.$$

6. *Állapítsuk meg, hogy az* m *valós paraméter mely értékeire lesznek a* $2x^2+2mx+m^2-1=0$ *egyenlet gyökei valósak, és határozzuk meg ezekre az* m *értékekre az* $f(m)=2(x_1+x_2+x_1x_2+1)$ *kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét, ahol* x_1 *és* x_2 *az adott egyenlet megoldásai.*

Megoldás. Az adott egyenlet diszkriminánsa

$$D=4m^2-4\cdot 2(m^2-1)=4(2-m^2),\quad D\ge 0,\quad\text{ha}\quad -\sqrt{2}\le m\le\sqrt{2}.$$

Mivel $x_1 + x_2 = -m$ és $x_1 x_2 = \dfrac{m^2-1}{2}$, azért

$$f(m) = 2\left(-m + \frac{m^2-1}{2} + 1\right) = (m-1)^2.$$

Mivel $-\sqrt{2} \le m \le \sqrt{2}$, azért $-1-\sqrt{2} \le m-1 \le -1+\sqrt{2}$, így $0 \le (m-1)^2 \le \left(1+\sqrt{2}\right)^2$.

$f(m)$ legkisebb értéke 0, amit $m = 1$ esetén vesz fel, a legnagyobb értéke $\left(1+\sqrt{2}\right)^2$, amit az $m = -\sqrt{2}$ helyen vesz fel.

7. *Igazoljuk, hogy az a, b, c oldalú háromszög c oldalával szemközti γ szög pontosan akkor (akkor és csak akkor) $120°$, ha*

$$4s(s-c) = ab, \quad \text{ahol} \quad s = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Megoldás. Ha $4s(s-c) = ab$, akkor $2s(2s-2c) = ab$, azaz $(a+b+c)(a+b-c) = ab$, ahonnan $c^2 = a^2 + b^2 + ab$. A koszinusztétel alkalmazásával $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, így $-2\cos\gamma = 1$, $\cos\gamma = -\dfrac{1}{2}$, $\gamma = 120°$.

Ha $\gamma = 120°$, akkor $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120°$, azaz

$$c^2 = a^2 + b^2 + ab; \quad -ab = a^2 + b^2 - c^2,$$

tehát $2ab - ab = a^2 + 2ab + b^2 - c^2$, azaz

$$ab = (a+b)^2 - c^2 = (a+b+c)(a+b-c) = 2s(2s-2c),$$

így valóban $ab = 4s(s-c)$.

8. *Az $\mathbf{n}(-1;1)$ vektorra merőleges g egyenes az ordináta tengelyt a C, az $y = (x-2)^2 + 1$ egyenletű parabolát az A és a B pontokban metszi. Állapítsuk meg a g egyenes egyenletét, valamint az A és B pontok koordinátáit, ha $|\overrightarrow{AB}| = 3 \cdot |\overrightarrow{AC}|$.*

Megoldás. A g egyenes egyenletét $-x + y = c$ ($c \in \mathbb{R}$) alakban keressük, tehát $y = x + c$, tehát $C(0;c)$. Legyen az A, illetve a B pont abszcisszája x_1, illetve x_2, akkor $A(x_1; x_1 + c)$, $B(x_2; x_2 + c)$. Az A és B pontok koordinátáit az egyenes és a parabola egyenleteiből alkotott egyenletrendszer megoldásaként kapjuk, azaz x_1 és x_2 az

$$(x-2)^2 + 1 = x + c, \qquad x^2 - 5x + 5 - c = 0$$

egyenletek gyökei. A feltételből következik, hogy $AB^2 = 9 \cdot AC^2$, tehát

$$(x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 = 9(x_1^2 + x_1^2), \quad \text{azaz} \quad (x_2 - x_1)^2 = 9x_1^2,$$

tehát $x_2 - x_1 = 3x_1$ vagy $x_2 - x_1 = -3x_1$; $x_2 = 4x_1$ vagy $x_2 = -2x_1$. Mivel $x_1 + x_2 = 5$ és $x_1 x_2 = 5 - c$, azért

$$5x_1 = 5, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4, \quad 1 \cdot 4 = 5 - c, \quad c = 1,$$

vagy

$$-x_1 = 5, \quad x_1 = -5, \quad x_2 = 10, \quad (-5) \cdot 10 = 5 - c, \quad c = 55.$$

Ha $c = 1$, akkor a g egyenes egyenlete $y = x + 1$ és $A_1(1;2)$, $B_1(4;5)$. Ha $c = 55$, akkor a g egyenes egyenlete $y = x + 55$ és $A_2(-5;50)$, $B_2(10;65)$. Ezek valóban megoldások.