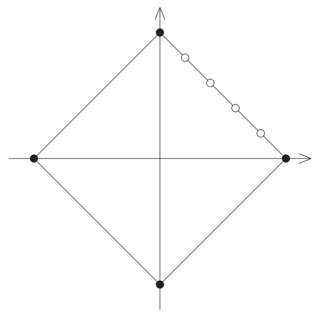
1. Jelölje C_n és E_n az $|x|+|y| \le n$ egyenlőtlenség, illetve az $|x|+|y|=n$ egyenlet egész megoldásainak a számát. Ekkor nyilván $C_0=E_0=1$ és $C_i=E_i+C_{i-1}$. Adjuk össze ezeket az egyenlőségeket az $i=1,2,\ldots,n$ értékekre:

$$C_1+C_2+\ldots+C_n=E_1+E_2+\ldots+E_n+C_0+C_1+C_2+\ldots+C_{n-1},$$

azaz

$$C_n=E_1+E_2+\ldots+E_n+C_0.$$

Az E_i halmaz elemei az $|x|+|y|=i$ egyenlet egész megoldásai (*ábra*). Az $x \ge 0$, $y \ge 0$ síknegyedben $i+1$ megoldást kapunk, ezek: $(i;0),(i-1;1),\ldots,(0;i)$. A további három síknegyeddel együtt ez összesen $4(i+1)$ megoldás, így azonban a tengelyeken lévő összesen 4 megoldás mindegyikét kétszer számoltuk. Eszerint $E_i=4i$, ha $i>0$.



Így $C_n=4(1+2+\ldots+n)+1=2n^2+2n+1$. Behelyettesítve $C_{1000}=2\,002\,001$.

2. Legyen $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=u$ és u konjugáltját, $\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$-t jelöljük v-vel. Ekkor

$$uv=\sqrt[3]{\left(7+5\sqrt{2}\right)\left(7-5\sqrt{2}\right)}=-1.$$

Próbáljuk kiszámolni $u+v$ értékét. Az $(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$ azonosság felhasználásával $(u+v)^3=7+5\sqrt{2}+7-5\sqrt{2}-3(u+v)$, tehát $t=u+v$ gyöke a $t^3=14-3t$ egyenletnek. Némi próbálkozás után kapjuk, hogy az egyenletnek megoldása a 2, ennek megfelelően $t^3+3t-14=(t-2)(t^2+2t+7)$. A másodfokú tényezőnek nincsen valós gyöke, így ha t olyan valós szám, amelyre $t^3+3t-14=0$, akkor $t=2$.

u-ra és v-re az $uv=-1$, $u+v=2$ egyenleteket kaptuk, a gyökök és együtthatók közti összefüggések szerint tehát u (és persze v) gyökei az

$$x^2-2x-1=0$$

egyenletnek.

Megjegyzések. 1. Némi próbálkozás után felismerhető, hogy a köbgyök alatt $7+5\sqrt{2}=\left(1+\sqrt{2}\right)^3$ áll. Így $u=1+\sqrt{2}$, ahonnan ugyancsak felírható a keresett egyenlet:

$$x=1+\sqrt{2} \quad\Rightarrow\quad x-1=\sqrt{2} \quad\Rightarrow\quad (x-1)^2=2 \quad\Rightarrow\quad (x-1)^2-2=x^2-2x-1=0.$$

2. Ha közvetlenül az $x=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$ „egyenletre” alkalmazzuk az előbbi módszert, akkor köbre emelés után $x^3=7+5\sqrt{2}$ adódik, amit rendezve és négyzetre emelve $(x^3-7)=50$, azaz a hatodfokú $x^6-14x^3-1=0$ egyenlet adódik. Ennek a polinomnak valóban osztója az x^2-x-1 polinom.

3. Ha a három szomszédos páros szám közül a középső osztható 4-gyel, akkor a két szélső $4k-2$ és $4k+2$ alakú szám a 2-nek pontosan az első hatványával osztható, ebben az esetben a középső szám megfelelő. Ha pedig a középső páros szám nem osztható 4-gyel, akkor mindkét szélső páros szám a 4-nek többszöröse. Közülük pontosan egy 8-cal is osztható és így rendelkezik az előírt tulajdonsággal.

4. Ha a sorozat differenciája nulla, akkor $\sqrt{a_i}=\sqrt{a_1}$, a bal oldalon az $n-1$ egyenlő tagból álló összeg értéke $\dfrac{n-1}{2\sqrt{a_1}}$, ami egyenlő a jobb oldal értékével.

Ha $d \ne 0$, akkor gyöktelenítsük a nevezőket:

$$\frac{1}{\sqrt{a_i}+\sqrt{a_{i+1}}}=\frac{\sqrt{a_{i+1}}-\sqrt{a_i}}{a_{i+1}-a_i}=\frac{1}{d}\left(\sqrt{a_{i+1}}-\sqrt{a_i}\right).$$

A bal oldal értéke tehát

$$\frac{1}{d}\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_{n-2}}+\ldots+\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}\right)=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d}.$$

A jobb oldalon a nevezőt gyöktelenítve

$$\frac{(n-1)\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}\right)}{a_n-a_1}$$

adódik, ami $a_n - a_1 = (n-1)d$ miatt valóban egyenlő a bal oldal értékével.

5. $\overline{ababab} = \overline{ab} \cdot 10101 = \overline{ab} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$. Ennek a számnak a legnagyobb prímosztója a 37-nél nagyobb $\overline{ab}$ prím lehet. A legnagyobb kétjegyű prím a 97, így 979 797 esetén kapjuk a legnagyobb prímosztót, értéke 97.

6. A logaritmus értelmezése szerint $x > 0$, $x \neq 1$ és $y > 0$. A feltétel szerint x és y egész számok, így $x \geq 2$, $y \geq 1$. Ekkor a bal oldal is értelmes. A jobb oldal $\log_x xy$, a logaritmusfüggvény kölcsönösen egyértelmű, tehát $5\sqrt{xy}+24 = xy$.

$0 \leq \sqrt{xy}$-ra nézve másodfokú egyenletet kaptunk, ennek nemnegatív gyöke 8, ahonnan $xy = 64$. Mivel $x \geq 2$ egész, a $64 = 2^6$-nak 1-nél nagyobb osztói lehetnek x értékei és minden ilyen x-re $y = \dfrac{64}{x}$ pozitív egész. Lépéseink megfordíthatók, így ezek a számpárok megoldásai az eredeti egyenletnek.

Az egyenlet tehát összesen hat pozitív egész számpárra teljesül.

7. $0 < a_n < 2$ pontosan akkor teljesül, ha

$$3 < \log_2(n+4) < 5.$$

Az $x \mapsto \log_2 x$ függvény szigorúan monoton növő, így a feltétel ekvivalens a

$$2^3 < n+4 < 2^5$$

egyenlőtlenséggel. A $\left]2^3; 2^5\right[$ intervallumban $2^5 - 1 - 2^3 = 23$ egész szám van. $n+4$ ezek mindegyikét fölveszi és $\log_2(n+4)$ ezek mindegyikére értelmes.

A sorozatnak tehát 23 olyan pozitív eleme van, amely kisebb 2-nél.

8. I. megoldás. Jelöljük a bal oldalon álló függvényt $f(x)$-szel és a második tagban alakítsunk teljes négyzetté a négyzetgyök alatt:

$$f(x) = \sqrt{x^2+9} + \sqrt{(x-8)^2+9}.$$

Ekkor $g(x) = f(x+4) = \sqrt{(x+4)^2+9} + \sqrt{(x-4)^2+9}$, így elegendő $g(x)$ minimális értékét keresni. Mivel $g(x) > 0$, azért $g(x)$ akkor minimális, ha $g^2(x)$ minimális.

$$g^2(x) = 2(x^2+25) + 2\sqrt{(x^2+25+8x)(x^2+25-8x)} =$$

$$= 2(x^2+25) + 2\sqrt{(x^2+25)^2 - 64x^2}.$$

A második gyökjel alatt két pozitív mennyiség szorzata áll:

$$(x^2+25)^2 - 64x^2 = x^4 - 14x^2 + 25^2 \geq x^4 - 50x^2 + 25^2 = (x^2-25)^2,$$

és pontosan akkor van egyenlőség, ha $x^2 = 0$. Így

$$g^2(x) \geq 2(x^2+25) + 2\sqrt{(x^2-25)^2} = 2(x^2+25) + 2|x^2-25| = \begin{cases} 4x^2, & \text{ha } x^2 \geq 25 \\ 100, & \text{ha } x^2 < 25. \end{cases}$$

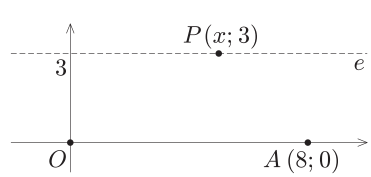
Ha $x^2 \geq 25$, akkor $4x^2 \geq 100$, így mindenképpen

$$g^2(x) \geq 100, \quad \text{azaz} \quad g(x) \geq 10,$$

egyenlőség pedig pontosan akkor teljesül, ha $x^2 = 0$, azaz $x = 0$. Így $f(x) = g(x-4) \geq 10$ és pontosan akkor van egyenlőség – azaz $f(x)$ pontosan akkor minimális –, ha $x = 4$.

II. megoldás. $f(x)$ két tagjának geometriai jelentés tulajdonítható.

Tekintsük a derékszögű koordinátarendszerben az $O(0;0)$, $A(8;0)$ és az $y=3$ egyenesen mozgó $P(x;3)$ pontokat (*1. ábra*).



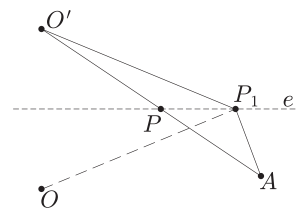
1. ábra

Ekkor az ismert távolságformula szerint

$$PO = \sqrt{x^2 + 3^2} \quad \text{és} \quad PA = \sqrt{(x-8)^2 + 3^2}.$$

A feladat kérdése tehát úgy fogalmazható, hogy az e egyenes mely P pontjára lesz minimális a $PO+PA$ távolságösszeg.

A feladat jól ismert megoldását úgy kapjuk, hogy az egyik rögzített pontot – legyen ez az O – tükrözzük az e egyenesre (*2. ábra*). Ekkor az $O'A$ szakasz e-vel való P metszéspontjában adódik a minimum.



2. ábra

Valóban, az egyenes tetszőleges, P-től különböző P_1 pontjára $OP_1 = O'P_1$ a tükrözés miatt, a háromszög-egyenlőtlenség szerint pedig $O'P_1 + P_1A > O'P + PA = O'A$.

Mivel az e egyenes most párhuzamos az OA szakasszal, az egyenes középvonala az AOO' háromszögnek, így P első koordinátája a két rögzített pont, O és A első koordinátájának a számtani közepe, $x_P = \dfrac{x_O + x_A}{2} = 4$. A $PO + PA$ összeg tehát az e egyenes $P(4;3)$ pontjára lesz a legkisebb, így a kifejezés értéke akkor minimális, ha $x = 4$.

9. A. Szorozzuk $\sin 15° + \cos 15°$ értékét $\sin 45° = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$-vel. Az ismert addíciós összefüggés szerint

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 15° + \cos 15°) = \sin 15° \cdot \cos 45° + \cos 15° \cdot \sin 45° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Így $\sin 15° + \cos 15° = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, azaz

$$A = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^{2002} \cdot \frac{1}{3^{1001}} = \frac{1}{2^{1001}}.$$

B. Mivel $97 + 56\sqrt{3} = \left(7 + 4\sqrt{3}\,\right)^2$, azért

$$B = \log_{7+4\sqrt{3}} \frac{1}{97 + 56\sqrt{3}} = \log_{7+4\sqrt{3}} \left(7 + 4\sqrt{3}\,\right)^{-2} = -2.$$

C. Számoljuk $2C$ értékét úgy, hogy a második alkalommal fordított sorrendben írjuk le az összeg tagjait. (Ahogyan a legenda szerint a kis Gauss összegezte a számtani sorozatot.) Ekkor

$$2C = \cos(1 \cdot 9°) + \cos(2 \cdot 9°) + \ldots + \cos(19 \cdot 9°) +$$

$$+ \cos(19 \cdot 9°) + \cos(18 \cdot 9°) + \ldots + \cos(1 \cdot 9°).$$

Az összesen $2 \cdot 19$ tagú összeg egymás alatt álló tagjai

$$\cos(i \cdot 9°) + \cos\left[(20 - i) \cdot 9°\right] = \cos(9i°) + \cos(180° - 9i°)$$

alakúak. Ismeretes, hogy ha $\alpha + \beta = 180°$, akkor $\cos\alpha + \cos\beta = 0$, így az egymás alatt álló tagok összege 0, tehát $2C = 0 = C$.

A megfelelő sorrend tehát $B < C < A$.

10. Ha eredetileg b autóbuszt rendeltek, akkor a feltétel szerint

$$\frac{n}{b-1} = \frac{n}{b} + 5, \quad \text{azaz} \quad n = 5(b^2 - b).$$

Ha $300 \le n \le 400$, akkor $60 \le b^2 - b \le 80$, tehát a

$$b^2 - b - 80 \le 0 \le b^2 - b - 60$$

egyenlőtlenségrendszert kell megoldanunk, ahol b pozitív egész.

Az első feltételből $b \le 9{,}46$, a másodikból pedig $b \ge 8{,}26$ adódik. Így $b = 9$ és $n = 5 \cdot (9^2 - 9) = 360$.

11. Ha a és b a derékszögű háromszög befogói, c pedig az átfogó, akkor Pitagorasz tétele szerint $c = \sqrt{a^2+b^2}$, a feltétel pedig azt jelenti, hogy

$$\frac{x+y}{2} = a+b \quad \text{és} \quad \sqrt{xy} = c = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Innen az

$$x+y = 2(a+b)$$

$$xy = a^2+b^2$$

egyenletrendszert kapjuk.

A gyökök és együtthatók közti összefüggések szerint x és y gyökei a

$$t^2 - 2(a+b)t + a^2 + b^2 = 0$$

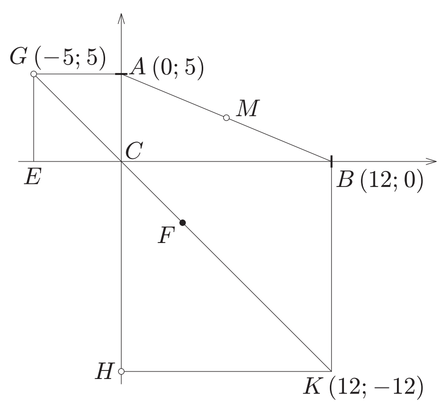
másodfokú egyenletnek, amit megoldva $t_{1,2} = a+b \pm \sqrt{2ab}$.

Az x, y mennyiségek értéke tehát valamilyen sorrendben $a+b-\sqrt{2ab}$ és $a+b+\sqrt{2ab}$.

Megjegyzés. Ha a és b pozitív számok, akkor $a+b-\sqrt{2ab} > 0$, a feladatnak tehát minden derékszögű háromszögre van megoldása.

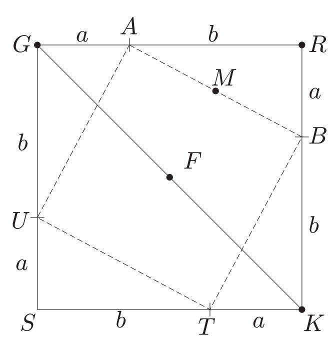
12. I. megoldás. Vegyünk föl egy derékszögű koordinátarendszert az *1. ábra* szerint. Ekkor $M(6; 2{,}5)$ és $F(3{,}5; -3{,}5)$. Az MF szakasz hosszát a távolságformulával számolva

$$MF = \sqrt{2{,}5^2 + 6^2} = \sqrt{42{,}25} = 6{,}5.$$



1. ábra

II. megoldás. Oldjuk meg a feladatot általánosan, legyenek a háromszög befogói a és b, átfogója c. Induljunk ki egy $a+b$ oldalú $GSKR$ négyzetből (*2. ábra*). Ha a négyzet minden oldalát az ábra szerint osztjuk fel a, b hosszúságú szakaszokra, akkor az osztópontok az $AUTB$ négyzet csúcsai.

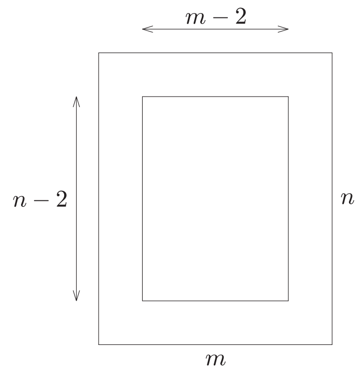


2. ábra

A két négyzet közös centruma a GK átló F felezőpontja (az F körüli 90°-os forgatás az ábrát önmagába viszi). Az AFB tehát egyenlő szárú derékszögű háromszög, a derékszögű csúcsot, F-et az $AUTB$ négyzet AB oldalának M felezőpontjával összekötő szakasz hossza tehát a négyzet oldalának, AB-nek a felével egyenlő.

Megjegyzés. A feladat háromszögének átfogója $c = \sqrt{5^2+12^2} = 13$, ennek fele 6,5. A második bizonyításból az is kiderül, hogy FM merőleges AB-re.

13. A feltételből következik, hogy $m \geq 3$. A szoba összesen $m \cdot n$ darab járólappal fedhető le, a fallal nem érintkező „belső” részen pedig $(m-2)(n-2)$ járólap van.



A feltétel szerint
$$mn = 2(m-2)(n-2) = 2mn - 4m - 4n + 8.$$
Rendezés után $mn - 4m - 4n + 8 = 0$, azaz
$$(m-4)(n-4) = 8$$
adódik. A bal oldalon $m-4$ és $n-4$ egész számok és $3 \le m \le n$ miatt $-1 \le m-4 \le n-4$, ha tehát a szorzatuk 8, akkor mindkettő pozitív. A 8 pozitív egészek szorzataként $1 \cdot 8$ vagy pedig $2 \cdot 4$ alakban áll elő, ha a tényezők nagyságviszonyára is tekintettel vagyunk. Így két megoldást kapunk:

a) $m-4=1$ és $n-4=8$, azaz $m=5$ és $n=12$;

b) $m-4=2$ és $n-4=4$, azaz $m=6$ és $n=8$.

Mindkét számpár megoldása a feladatnak.

14. Tegyük fel, hogy létezik ilyen mértani sorozat. Ekkor $a_n \ne a_1$ miatt a sorozat hányadosa, $q \ne 1$. A sorozat elemeinek reciprokai is mértani sorozatot alkotnak, ennek hányadosa $\dfrac{1}{q} \ne 1$. Az ismert összefüggés szerint az elemek reciprokának összege
$$8 = \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1}{\frac{1}{q} - 1} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1-q^n}{q^{n-1} - q^n}.$$
Használjuk fel, hogy $q^{n-1} = \dfrac{a_n}{a_1}$. Az elemek reciprokának összege így a következőképpen alakul:
$$8 = \frac{1 - \frac{a_n}{a_1} q}{a_n - q \cdot a_n}.$$
Behelyettesítve
$$8 = \frac{1 - \frac{13}{3} q}{13(1-q)}, \quad \text{ahonnan} \quad q = \frac{309}{299}, \quad \text{vagyis} \quad q^{n-1} = \left(\frac{309}{299}\right)^{n-1} = \frac{a_n}{a_1} = \frac{13}{3}.$$
Innen $309^{n-1} \cdot 3 = 299^{n-1} \cdot 13$ következik. Mivel $n \ge 3$ egész, a bal oldal osztható 3-mal, a jobb oldal pedig nem. Ez az egyenlőség tehát egyetlen pozitív egész n-re sem állhat fönn, a kérdéses mértani sorozat valóban nem létezik.

15. *a*) Ha $p\%$ jelöli az átlagos évi hozamot, akkor
$$400\,000 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 521\,920, \quad \text{ahonnan} \quad 1 + \frac{p}{100} = \sqrt{\frac{521\,920}{400\,000}} \approx 1{,}1423,$$
az átlagos évi hozam tehát $p \approx 14{,}23\%$.

b) Ha $q\%$ jelöli a tényleges első évi kamatlábat, akkor a második évi kamatláb $(q + 4{,}5)\%$, befektetésünk a második év után $\left(1 + \dfrac{q}{100}\right) \cdot \left(1 + \dfrac{q+4{,}5}{100}\right)$-szorosára növekszik.

Így q-ra a másodfokú
$$\left(1 + \frac{q}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{q+4{,}5}{100}\right) = \frac{52\,192}{40\,000}$$
egyenletet kapjuk. Rendezés után kapjuk, hogy $2q^2 + 409q - 5196 = 0$.

Ennek az egyenletnek a pozitív megoldása $q = \dfrac{-409 + 457}{4} = 12$.

A tényleges kamatláb tehát az első évben 12%, a másodikban pedig $16,5\%$ volt.

Megjegyzés. Az átlagos kamatláb *nem* az éves kamatlábak számtani közepe. Az éves szorzószámokat összehasonlítva

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)^2=\left(1+\frac{12}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{16,5}{100}\right),$$

azaz $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ az $\left(1+\frac{12}{100}\right)$ és az $\left(1+\frac{16,5}{100}\right)$ *mértani közepe,* valamivel kisebb a számtani közepüknél, $\left(1+\frac{12+16{,}5}{200}\right)$-nál. Ennek megfelelően $p\approx 14{,}23$ is valamivel kisebb, mint $\frac{12+16,5}{2}=14{,}25$.

16. *a*) $V=V_{\text{kúp}}+V_{\text{cs.kúp}}$, $\alpha=\frac{108^\circ}{2}=54^\circ$,

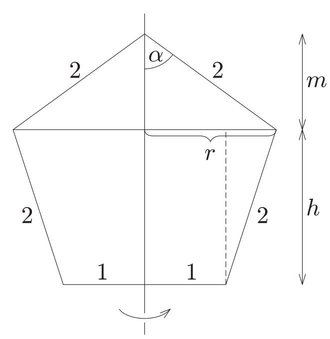
$$r=2\sin 54^\circ\approx 1{,}62,\quad m=2\cos 54^\circ\approx 1{,}18,$$

$$h=\sqrt{4-(r-1)^2}\approx 1{,}9,$$

$$V_{\text{kúp}}=\frac{\pi r^2 m}{3}=\frac{8\sin^2 54^\circ\cos 54^\circ}{3}\pi\approx 3{,}22\text{ cm}^3,$$

$$V_{\text{csonkakúp}}=\frac{\pi}{3}\cdot h(r^2+r+1)\approx 10{,}42\text{ cm}^3,$$

$$V\approx 13{,}64\text{ cm}^3.$$



A függőón tömege $M=V\cdot\varrho\approx 106{,}9$ g.

b) A minimális forgáshenger sugara r, magassága pedig $m+h$. A térfogata így $V_{\mathrm{H}}=r^2\pi(m+h)\approx 25{,}25\text{ cm}^3$, így legalább $V_{\mathrm{H}}-V\approx 11{,}61\text{ cm}^3$ hulladék keletkezik, ami a henger térfogatának közelítőleg 46%-a.

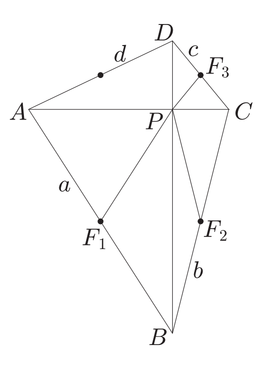
17.

$$AB^2-BC^2=(AB^2-BP^2)-(BC^2-BP^2)=$$
$$=AP^2-PC^2=(AD^2-DP^2)-(DC^2-DP^2)=$$
$$=AD^2-DC^2,$$

azaz $AB^2-BC^2=AD^2-DC^2$, vagy átrendezve

$$AB^2+DC^2=AD^2+BC^2;$$

ha a négyszög átlói merőlegesek, akkor a szemközti oldalak négyzetösszege egyenlő.



Thalész tétele szerint $AB = 2PF_1 = 30$, $BC = 2PF_2 = 26$, $CD = 2PF_3 = 10$. Így $AD^2 = AB^2 + DC^2 - BC^2 = 30^2 + 10^2 - 26^2 = 324 = 18^2$.

Az $ABCD$ négyszög kerülete $30 + 26 + 10 + 18 = 84$.

Megjegyzés. A megoldás során talált állításnak a megfordítása is igaz: ha egy négyszög szemközti oldalainak négyzetösszege egyenlő, akkor a négyszög átlói merőlegesek egymásra.

18. Mindkét négyzetgyök alatt teljes négyzet áll:

$$x - 1 - 2\sqrt{x-2} = \left(\sqrt{x-2} - 1\right)^2 \quad \text{és} \quad x + 2 - 4\sqrt{x-2} = \left(\sqrt{x-2} - 2\right)^2,$$

így a $\left|\sqrt{x-2} - 1\right| + \left|\sqrt{x-2} - 2\right| \le 3$ egyenlőtlenséget kell megoldanunk.

Az abszolút értéket felbontva:

$$\left|\sqrt{x-2} - 1\right| + \left|\sqrt{x-2} - 2\right| = \begin{cases} 3 - 2\sqrt{x-2}, & \text{ha } \sqrt{x-2} < 1; \\ 1, & \text{ha } 1 \le \sqrt{x-2} < 2; \\ 2\sqrt{x-2} - 3, & \text{ha } 2 \le \sqrt{x-2}. \end{cases}$$

Mivel $\sqrt{x-2} \ge 0$, azért a vizsgált egyenlőtlenség teljesül, ha $\sqrt{x-2} < 2$, ha pedig $2 \le \sqrt{x-2}$, akkor $2\sqrt{x-2} - 3 \le 3$, azaz $\sqrt{x-2} \le 3$.

Összefoglalva: a feladat egyenlőtlensége akkor és csak akkor teljesül, ha $\sqrt{x-2} \le 3$, azaz – figyelembe véve, hogy $\sqrt{x-2}$-nek értelmesnek kell lennie –, ha $2 \le x \le 11$.

19. A feltétel szerint az $a_{n+1} - a_n$ különbségsorozat elemeire $a_{n+1} - a_n = b_n = 2 + a_n$, ahonnan

$$(*) \qquad a_{n+1} = 2a_n + 2.$$

Innen $a_2 = 2a_1 + 2$, $a_3 = 2a_2 + 2 = 4a_1 + 6$, $a_4 = 2a_3 + 2 = 8a_1 + 14$. A feltétel szerint $a_1 + a_2 + a_3 + 7 = a_4$, azaz $(7a_1 + 8) + 7 = 8a_1 + 14$, ahonnan $a_1 = 1$.

Így $a_2 = 4$, $a_3 = 2 \cdot 4 + 2 = 10$, $a_4 = 2 \cdot 10 + 2 = 22$, $a_5 = 2 \cdot 22 + 2 = 46$.

Mivel a bizonyításban eddig nem használtuk fel, hogy a $b_n = a_{n+1} - a_n$ mértani sorozat, meg kell mutatnunk, hogy ez a feltétel is teljesül, egyébként a feladatnak nincsen megoldása.

A $(*)$ rekurzió felhasználásával a b_n különbségsorozatra azt kapjuk, hogy

$$b_n = a_{n+1} - a_n = (2a_n + 2) - (2a_{n-1} + 2) = 2(a_n - a_{n-1}) = 2b_{n-1}.$$

A b_n sorozat tehát valóban mértani sorozat, a hányadosa 2.

A b_n sorozat elemei tehát: $b_1 = a_2 - a_1 = 3$ és így $b_2 = 2 \cdot 3 = 6$, $b_3 = 12$, $b_4 = 24$, $b_5 = 48$.

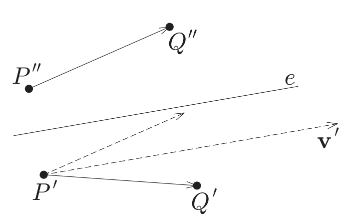
Megjegyzés. A b_n sorozatra vonatkozó észrevétel lehetővé teszi, hogy felírjuk a $(*)$ rekurzióval értelmezett sorozat n-edik elemét:

$$a_n = a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \ldots + a_2 - a_1 + a_1 =$$

$$= b_{n-1} + b_{n-2} + \ldots + b_1 + a_1 = 1 + 3 \cdot (2^{n-1} - 1).$$

Hasonlóan kapható meg az $a_{n+1} = p \cdot a_n + q$ sorozat n-edik eleme is, ha az első elem, a_1 értéke adott.

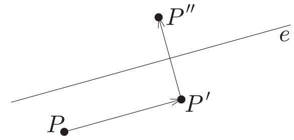
20. A tükrözés miatt $\mathbf{v}' = \overrightarrow{P'Q'} + \overrightarrow{P''Q''}$ párhuzamos az e egyenessel és így az e-vel párhuzamos $\mathbf{v}$ vektorral is (*1. ábra*).



1. ábra

Az eltolás miatt $\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ}$, így $\mathbf{v}' = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{P''Q''} = (-1; 2) + (2; -1) = (1; 1)$.

A tükrözés miatt $\overrightarrow{P'P''}$ merőleges e-re és így $\mathbf{v}$-re is, az eltolás miatt pedig $\overrightarrow{PP'}$ párhuzamos $\mathbf{v}$-vel (*2. ábra*).



2. ábra

Ha tehát a $\overrightarrow{PP''}=(3;1)$ vektort felbontjuk egy $\mathbf{v}$-vel párhuzamos és egy $\mathbf{v}$-re merőleges vektor összegére, akkor a vektorfelbontás egyértelműsége miatt a $\mathbf{v}$-vel párhuzamos összetevő éppen $\overrightarrow{PP'}=\mathbf{v}$, a $\mathbf{v}$-re merőleges összetevő pedig $\overrightarrow{P'P''}$.

Legyen $\overrightarrow{PP'}=t\cdot\mathbf{v}'=(t;t)$. Ez akkor lesz megfelelő, ha $\overrightarrow{PP''}-t\cdot\mathbf{v}'=(3-t;1-t)$ merőleges $\mathbf{v}'$-re, azaz skalárszorzatuk nulla:

$$(\overrightarrow{PP''}-t\cdot\mathbf{v}')\mathbf{v}'=0.$$

A $(3-t;1-t)(1;1)$ skalárszorzat értéke $4-2t$, ez pontosan akkor 0, ha $t=2$.

Így $\mathbf{v}=t\cdot\mathbf{v}'=(2;2)$, a P' pont koordinátái $\overrightarrow{PP'}=\mathbf{v}$ miatt $P'(1+2;2+2)$.

Az e egyenesnek $\mathbf{v}$ egy irányvektora, egyenletéhez elég egyetlen pontja. A tükrözés miatt a $P'P''$ szakasz felezőpontja $\left(\frac{3+4}{2};\frac{4+3}{2}\right)$ rajta van az e egyenesen, amelynek egyenlete így $y-x=0$.