

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:

$$a) \frac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{(x+1)(x^3-x^2+x-1)} = 1;$$

$$b) \sqrt{\operatorname{tg}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{ctg} x}; \quad c) \frac{\log_x 7}{\log_x 3} = \frac{\log_3 5}{\log_7 5}.$$

Megoldás. a) Mivel

$$(x-1)(x^3+x^2+x+1) \equiv (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

és

$$(x+1)(x^3-x^2+x-1) \equiv (x+1)(x-1)(x^2+1),$$

azért az egyenlet megoldásai $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

b) Az egyenlet akkor értelmezett, ha $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ értelmezett és $\operatorname{ctg} x \neq 0$, azaz ha $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$. Azonos átalakításokkal $|\operatorname{tg} x| = -\operatorname{tg} x$. Ez pontosan akkor teljesül, ha $\operatorname{tg} x \leq 0$ és $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Az egyenlet megoldásai:

$$\frac{\pi}{2} + n\pi < x < \pi + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

c) Az egyenletnek minden 1-től különböző pozitív valós szám megoldása, mert egy logaritmussfüggvény alapszáma és

$$\frac{\log_x 7}{\log_x 3} = \log_3 7 \quad \text{és} \quad \frac{\log_3 5}{\log_7 5} = \frac{\frac{1}{\log_5 3}}{\frac{1}{\log_5 7}} = \frac{\log_5 7}{\log_5 3} = \log_3 7.$$

2. Egy trapéz átlói merőlegesek egymásra. Párhuzamos oldalainak hossza 13, illetve 39 egység, egyik szára $\sqrt{369}$ egység. Mekkora a trapéz másik szára, területe és magassága?

Megoldás. A trapézt az átlói négy derékszögű háromszögre bontják. A párhuzamos oldalakhoz tartozó háromszögek hasonlóak, a hasonlósági arány 3 : 1. Legyen az átlók két szelete $3x$, x , illetve $3y$, y . Ekkor $x^2 + y^2 = 13^2$ és $x^2 + 9y^2 = 369$, ahonnan $y^2 = 25$, $x^2 = 144$, s mivel $x > 0$ és $y > 0$, azért $x = 12$, $y = 5$. A másik szár hossza

$$\sqrt{9x^2 + y^2} = \sqrt{9 \cdot 144 + 25} = \sqrt{1321} \text{ egység.}$$

Az átlók hossza $4x = 48$, illetve $4y = 20$ egység, s mivel az átlók merőlegesek egymásra, azért a trapéz területe $T = \frac{48 \cdot 20}{2} = 480$ területegység. A trapéz m magasságára $\frac{13+39}{2} \cdot m = 480$, $m = \frac{240}{13}$ egység.

3. Határozzuk meg az m paraméter értékét úgy, hogy az

$$(m+1)x^2 + (2m+1)x - 2 = 0$$

egyenletnek két különböző, (-1) -nél kisebb valós gyöke legyen.

Megoldás. Mivel az egyenletnek két különböző gyöke van, azért $m+1 \neq 0$ és az egyenlet diszkriminánsa pozitív, tehát

$$D = (2m+1)^2 + 8(m+1) \equiv (2m+3)^2 > 0, \quad \text{azaz} \quad m \neq -\frac{3}{2}.$$

Az egyenlet gyökei: $x_1 = -2 < -1$ és $x_2 = \frac{1}{m+1}$. A követelmények szerint

$$\frac{1}{m+1} < 0 \quad \text{és} \quad \frac{1}{m+1} < -1, \quad \text{azaz} \quad m < -1 \quad \text{és} \quad \frac{m+2}{m+1} < 0,$$

így $m > -2$. Az egyenletnek akkor van két különböző, (-1) -nél kisebb gyöke, ha $-2 < m < -\frac{3}{2}$ vagy $-\frac{3}{2} < m < -1$.

4. Egy sorozat első tagja 1, a hatodik tagja 51, az első három tag összege 23; a szomszédos tagok különbségei egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Számítsuk ki a sorozat első három tagját.

Megoldás. Legyen a különbségsorozatok első öt tagja: a , $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $a+4d$. A sorozat első hat tagja: 1 , $1+a$, $1+2a+d$, $1+3a+3d$, $1+4a+6d$, $1+5a+10d$. A feltétel szerint $3+3a+d=23$ és $1+5a+10d=51$, ahonnan $a=6$, $d=2$. A sorozat első három tagja: 1 , 7 , 15 .

5. Adott egy háromszög két oldala, a és c ($\frac{c}{2} < a < c$), valamint

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\cos(\alpha + \gamma)}{\cos(\beta + \gamma)},$$

ahol α az a , γ a c , β pedig a (harmadik) b oldallal szemközti szög. Fejezzük ki a -val és c -vel a b oldal hosszát.

Megoldás. $\alpha + \gamma = 180^\circ - \beta$ és $\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$, tehát

$$\cos(\alpha + \gamma) = \cos(180^\circ - \beta) = -\cos \beta$$

és

$$\cos(\beta + \gamma) = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha.$$

Ezek alkalmazásával $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{-\cos \beta}{-\cos \alpha}$, ahonnan $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \beta \cdot \cos \beta$, tehát $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$. Ez pontosan akkor teljesül, ha $2\alpha = 2\beta$, $\alpha = \beta$ és ekkor $b = a$, vagy $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, $\alpha + \beta = 90^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, és ekkor $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

6. Két kör kívülről érinti egymást. Az egyik közös külső érintőjüknek az érintési pontok közé eső szakaszát megforgatjuk a körök középpontjain áthaladó egyenes körül. A keletkezett csonkakúp palástjának területe 576π területegység, az egyik kör sugara 16 egység. Mekkora a másik kör sugara?

Megoldás. Legyen a két kör középpontja O_1, O_2 , a körök sugarai R_1, R_2 , az érintési pont E . Az egyik külső érintőszakasz két végpontja, az érintési pontok E_1, E_2 . Messe a két kör E -beli közös érintője az E_1E_2 szakaszt F -ben, $E_1E_2 = a$. Az E_1 , illetve E_2 pontok merőleges vetülete az O_1O_2 egyenesen legyen T_1 , illetve T_2 . A forgással keletkező csonka kúp alap-, illetve fedőlapkörének sugara $E_1T_1 = r_1$, illetve $E_2T_2 = r_2$. A csonka kúp palástjának területe $P = (r_1 + r_2)a\pi$. Egy külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt $FE_1 = FE = FE_2 = \frac{a}{2}$.

Az O_1FO_2 háromszög derékszögű (miért?), alkalmazható a magasságtétel, $FE^2 = O_1E \cdot EO_2$, azaz $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = R_1 \cdot R_2$, $a^2 = 4R_1R_2$. Az $E_1T_1T_2E_2$ négyszög trapéz, középvonala $EF = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{a}{2}$, tehát $r_1 + r_2 = a$.

A csonka kúp palástjának felszíne $P = (r_1 + r_2)a\pi = a^2\pi = 4R_1R_2\pi$. Most $P = 576\pi$, $R_1 = 16$, tehát $576\pi = 4 \cdot 16 \cdot R_2\pi$, ahonnan $R_2 = 9$ egység.

7. A k kör érinti az y tengelyt és a $3x - 4y = 48$ egyenletű egyenest az $x_1 = 8$ abszcisszájú E pontjában. Írjuk fel a kör egyenletét.

Megoldás. Az $x_1 = 8$ abszcisszájú érintési pont y_1 ordinátájára $3 \cdot 8 - 4y_1 = 48$, $y_1 = -6$. A keresett kör érinti az y tengelyt, így ha a középpontja $K(u; v)$, akkor egyenlete $(x - u)^2 + (y - v)^2 = u^2$. A $K(u; v)$ pont rajta van az E pontban az adott egyenesre merőleges egyenesen, amelynek egyenlete: $4x + 3y = 14$.

A feltételek szerint

$$(8 - u)^2 + (-6 - v)^2 = u^2 \quad \text{és} \quad 4u + 3v = 14,$$

ahonnan $u = 5$, $v = -2$ vagy $u = 20$, $v = -22$. A keresett körök egyenlete:

$$(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 25 \quad \text{vagy} \quad (x - 20)^2 + (y + 22)^2 = 400.$$

8. Határozzuk meg a

$$\frac{4}{4 \cdot 2^{2x} - 8 \cdot 2^{x-1} + \frac{11}{3}}$$

kifejezés értékkészletét, ha $-2 \leq x \leq 1$.

Megoldás. Azonos átalakításokkal

$$\frac{4}{4 \cdot 2^{2x} - 8 \cdot 2^{x-1} + \frac{11}{3}} \equiv \frac{1}{(2^x)^2 - 2^x + \frac{11}{12}} \equiv \frac{1}{\left(2^x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2}{3}}.$$

A megfelelő folytonos függvények alkalmazásával:

$$\begin{aligned} -2 \leq x \leq 1 &\Rightarrow 2^{-2} \leq 2^x \leq 2^1 \Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \leq 2^x - \frac{1}{2} \leq 2 - \frac{1}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 \leq \left(2^x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{2}{3} \leq \left(2^x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2}{3} \leq \frac{35}{12}, \end{aligned}$$

és végül

$$\frac{12}{35} \leq \frac{1}{\left(2^x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2}{3}} \leq \frac{3}{2}.$$

A kifejezés értékkészlete az adott intervallumon: $\left[\frac{12}{35}; \frac{3}{2}\right]$.

(A kifejezéssel adott függvény az adott intervallumban folytonos, ezért minden olyan y értéket felvesz, amelyre $\frac{12}{35} \leq y \leq \frac{3}{2}$.)