1. *Oldjuk meg a rendezett valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszereket:*

$$a)\quad \begin{aligned}(x+1)y&=0,\\ (x^2-1)(y+1)&=0;\end{aligned}\qquad\qquad b)\quad \begin{aligned}x^2+xy&=2,\\ y^2-2xy&=5.\end{aligned}$$

Megoldás. $a)$ Az első egyenletből $y=0$ vagy $x=-1$, a második egyenletből $y=-1$ vagy $x^2=1$.

Ha $y=0$, akkor $x^2=1$, tehát az $x_1=1$, $y_1=0$ és az $x_2=-1$, $y_2=0$ számpárok megoldások. Ha $y=-1$, akkor $x=-1$, tehát az $x_3=-1$, $y_3=-1$ számpár is megoldás. Ha $x=-1$, akkor $y\in\mathbb{R}$, tehát az $x_t=-1$, $y_t=t$, $t\in\mathbb{R}$ számpárok is megoldások. (Ezek között az $(x_2;y_2)$ számpár is megtalálható.)

2. *Legyen* $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-2x+4$. *Igazoljuk az* $f(k+2)=f(k)+8k+4$ *azonosságot.*

Megoldás. Mivel

$$f(k+2)=2(k+2)^2-2(k+2)+4=2k^2+6k+8$$

és

$$f(k)+8k+4=2k^2-2k+4+8k+4=2k^2+6k+8,$$

azért igaz az állítás.

3. *Határozzuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy a következő egyenletek egyik gyöke a másik gyökük kétszerese legyen:*

1) $x^2+3ax+2a^2=0$; 2) $x^2-3ax+2a^2-1=0$;

3) $x^2-3(a+1)x+2a^2+6a=0$; 4) $x^2+ax-2a-4=0$.

Megoldás. Tegyük fel, hogy az egyenleteknek van valós megoldása (mindegyik egyenletnek a diszkriminánsa nemnegatív). Legyenek a megoldások x_1 és $x_2=2x_1$.

1) $3x_1=-3a$, $2x_1^2=2a^2$, tehát $x_1=-a$, $x_2=-2a$, azaz minden $a\in\mathbb{R}$ esetén az egyik gyök a másik kétszerese.

2) $3x_1=3a$, $2x_1^2=2a^2-1$, azaz $2a^2=2a^2-1$, így egyetlen a-ra sem teljesül a követelmény.

3) $3x_1=3(a+1)$, $2x_1^2=2a^2+6a$, $2(a+1)^2=2a^2+6a$, tehát $a=1$ és ekkor $x^2-6x+8=0$, $x_1=2$, $x_2=4$.

4) $D=a^2-4(-2a-4)=(a+4)^2$, $x_{1,2}=\dfrac{-a\pm(a+4)}{2}$, $x_1=2$, $x_2=-a-2$. Ha $2x_1=x_2$, azaz $4=-a-2$, akkor $a=-6$; ha $x_1=2x_2$, azaz $2=-2a-4$, akkor $a=-3$, és ezek valóban megoldások.

4. *A koordináta-rendszerben adott két párhuzamos egyenes, e és f, valamint köztük a k kör. A k kört az e egyenesre tükrözve az* $x^2+y^2-4x-12y+39=0$ *egyenletű* k_1 *kört, az f egyenesre tükrözve pedig az* $x^2+y^2-16x+12y+99=0$ *egyenletű* k_2 *kört kapjuk. Határozzuk meg azt a pontot, amelyre* k_1 *és* k_2 *középpontosan szimmetrikus, illetve annak az egyenesnek az egyenletét, amelyre a* k_1 *és* k_2 *tengelyesen szimmetrikus. Számítsuk ki az e és f egyenesek távolságát.*

Megoldás. A k_1 kör egyenlete $(x-2)^2+(y-6)^2=1$, középpontja $C_1(2;6)$, a k_2 kör egyenlete $(x-8)^2+(y+6)^2=1$, középpontja $C_2(8;-6)$. k_1 és k_2 szimmetria-középpontja a C_1C_2 szakasz $F(5;0)$ felezőpontja, szimmetriatengelye pedig a C_1C_2 szakasz $x-2y=5$ egyenletű felező merőlegese; e és f egyenesek távolsága $\sqrt{45}$, a C_1C_2 távolság fele (pl. C_1F hossza).

5. *Egy négyoldalú gúla alaplapja az ABCD rombusz. A gúla E csúcsának az alapsíkra eső merőleges vetülete a rombusz átlóinak F metszéspontja. Számítsuk ki a gúla térfogatát és felszínét, ha a rombusz átlói* $AC=10$ cm, $BD=18$ cm *és a gúla magassága* $EF=12$ cm.

Megoldás. A rombusz átlói merőlegesen felezik egymást, így az AFE, illetve BFE derékszögű háromszögekből $AE=13$ cm, $BE=15$ cm és $CE=AE=13$ cm, valamint $DE=BE=15$ cm. A gúla térfogata $V=\dfrac{10\cdot18\cdot12}{2\cdot3}=360\ \text{cm}^3$.

Az alaprombusz élének hossza $\sqrt{81+25}=\sqrt{106}$ cm.

A palást négy egybevágó háromszögből áll, amelyek oldalainak hossza 13 cm, 15 cm és $\sqrt{106}$ cm. Egy ilyen háromszög területe kiszámítható a Heron-képlettel ($T^2=s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)$, ahol $s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$), valamelyik oldalhoz tartozó magasság kiszámításával, vagy valamelyik szög kiszámítása után az ismert $T=\dfrac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2}$ képlettel. Egy ilyen háromszög területe $T_1\approx65{,}74\ \text{cm}^2$, így a gúla felszíne

$$A\approx90+4\cdot65{,}74\approx352{,}96\ \text{cm}^2.$$

6. *Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:*

$$a)\quad \frac{\log_3 x}{\left(\log_{\frac13}x+3\right)\left(\log_{\frac13}x-1\right)}<0;\qquad b)\quad \frac{\log^2_{\frac13}x+2\log_{\frac13}x-3}{\log_3 x}\ge0.$$

Megoldás. *a*) Mivel $\log_{\frac{1}{3}} x = -\log_3 x$, azért az adott egyenlőtlenség

$$\frac{\log_3 x}{(\log_3 x - 3)(\log_3 x + 1)} < 0$$

alakban írható.

A $\log_3 x$ kifejezés $x > 0$-ra értelmezett és folytonos függvényt határoz meg. Így

- ha $\log_3 x > 3$, akkor a tört pozitív;
- ha $0 < \log_3 x < 3$, akkor a tört negatív, így $3^0 < 3^{\log_3 x} < 3^3$, azaz az $1 < x < 27$ számok megoldások;
- ha $-1 < \log_3 x < 0$, akkor a tört pozitív; míg
- ha $\log_3 x < -1$, akkor a tört negatív, így $3^{\log_3 x} < 3^{-1}$, tehát a $0 < x < \dfrac{1}{3}$ számok is megoldások.

b) Az egyenlőtlenség megoldásai: $\dfrac{1}{3} \leq x < 1$ vagy $x \geq 27$.

7. *a*) *Igazoljuk, hogy az* (a_n) *sorozat pontosan akkor számtani sorozat, ha minden* 1*-nél nagyobb természetes számra* $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$.

b) *Adott a* d *differenciájú* (a_n) *számtani sorozat. A sorozathoz találhatók olyan* p *és* q *valós számok, hogy minden* 1*-nél nagyobb* n *természetes szám esetén* $a_{n+1} = 2pa_n - qa_{n-1}$. *Határozzuk meg* p *és* q *lehetséges értékeit, ha* (a_n) (*i*) *nem állandó sorozat;* (*ii*) *olyan állandó sorozat, amelyben* $a_1 \neq 0$; (*iii*) *olyan állandó sorozat, amelyben* $a_1 = 0$.

Megoldás. *a*) Ha (a_n) számtani sorozat és differenciája d, akkor $a_{n+1} = a_n + d$ és $a_n = a_{n-1} + d$, tehát $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$, amiből $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$.

Ha az (a_n) sorozatra $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$, akkor minden $n > 1$ természetes számra $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$, tehát a sorozat számtani sorozat.

b) (*i*) Mivel egyrészt $a_{n+1} = 2p \cdot a_n - q \cdot a_{n-1}$, másrészt $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$, azért $2p \cdot a_n - q \cdot a_{n-1} = 2a_n - a_{n-1}$, tehát $(2p - 2) \cdot a_n = (q - 1) \cdot a_{n-1}$ minden $n > 1$ természetes számra és $a_n \neq a_{n-1}$, ezért $p = 1$ és $q = 1$.

(*ii*) Ha a sorozat minden tagja a_1 és $a_1 \neq 0$, akkor $(2p - 2) \cdot a_1 = (q - 1) \cdot a_1$, tehát $2p - 2 = q - 1$, azaz $p \in \mathbb{R}$ és $q = 2p - 1$.

(*iii*) Ha a sorozat minden tagja 0, akkor p és q tetszőleges valós szám, hiszen $(2p - 2) \cdot 0 = (q - 1) \cdot 0$.

8. *Egy kör kerületének* P *pontjából megrajzoltuk a* $PA = 12$ cm *és* $PB = 16$ cm *hosszúságú húrokat. A* PA *húr* F *felezőpontjának a* PB *egyenestől való távolsága* $2\sqrt{3}$. *Számítsuk ki a kör sugarát.*

Megoldás. Az F pont a P ponttól 6 cm, a BP egyenestől $2\sqrt{3}$ cm távolságra van, így a BP egyenes egyik oldalán két megfelelő F pont van: F_1 és F_2. (A BP másik oldalán is van két megfelelő pont, de így az előzővel egybevágó alakzatot kapunk.)

Legyen $BPA\sphericalangle = \alpha$. Ekkor $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (Ha a szerkesztésre nem hivatkozunk, akkor a $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ egyenletből is megkapjuk, hogy két megoldás van.) Koszinusztétellel $AB^2 = AP^2 + PB^2 - 2 \cdot AP \cdot PB \cdot \cos\alpha = 16 \cdot (25 - 24 \cdot \cos\alpha)$, másfelől az r sugarú körben $r = \dfrac{AB}{2 \cdot \sin\alpha}$. Mivel $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, azért $|\cos\alpha| = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Innen két megoldást kapunk:

$$r_1 = 2\sqrt{\sqrt{3}\big(25\sqrt{3} - 24\sqrt{2}\big)} \approx 4{,}03 \text{ cm}, \quad \text{illetve} \quad r_2 = 2\sqrt{\sqrt{3}\big(25\sqrt{3} + 24\sqrt{2}\big)} \approx 11{,}57 \text{ cm}.$$