1. *Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:*

$$a)\quad \sqrt{5x-6}=2+\sqrt{x-2}\qquad b)\quad \sqrt{5x-5}=2+\sqrt{x-2};$$

$$c)\quad \sqrt{5x-4}=2+\sqrt{x-2};\qquad d)\quad \sqrt{5x-14}=2+\sqrt{x-2}.$$

Megoldás. Dolgozzunk a $\sqrt{5x-a}=2+\sqrt{x-2}$ egyenlettel. Az egyenlet sokféle módon oldható meg. Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát (ekkor következmény egyenletre jutunk), majd rendezzük az egyenletet. Ekkor

$$4x-a-2=4\sqrt{x-2}.$$

Legyen $\sqrt{x-2}=y\geq 0$, így $x=y^2+2$ és az

$$y^2-y+\frac{6-a}{4}=0$$

egyenlethez jutunk.

a) Ha $a=6$, akkor $y^2-y=0$, $y_1=0$, $y_2=1$, így $x_1=2$, $x_2=3$ és ezek valóban megoldások.

b) Ha $a=5$, akkor $y^2-y+\frac{1}{4}=0$, $y_3=\frac{1}{2}$, így $x_3=\frac{9}{4}$, és ez valóban megoldás.

c) Nincs megoldása az egyenletnek.

d) A megoldás $x_4=6$.

2. *A konvex $ABCD$ négyszög átlói merőlegesek egymásra, a BD átló felezi az AC átlót. Az $ABC\sphericalangle=120^\circ$, $AC=4\sqrt{3}$, $BD=8$. Számítsuk ki a négyszög területét, oldalait és szögeit.*

Megoldás. A négyszög területe $T=\frac{4\sqrt{3}\cdot 8}{2}=16\sqrt{3}$.

Jelölje F az átlók metszéspontját. Ekkor az ABF derékszögű háromszög B csúcsnál lévő szöge 60°, s mivel $AF=2\sqrt{3}$, így $BF=2$, $AB=BC=4$, $BAF\sphericalangle=BCF\sphericalangle=30^\circ$.

Mivel $DF=BD-BF=8-2=6$, azért az AFD derékszögű háromszögben $AD^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2+6^2=48$, $AD=CD=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$. Így $AD=DC=AC$, tehát az ACD egyenlő oldalú háromszög. A négyszög szögei: 120°, 90°, 60°, 90°.

3. *Igazoljuk, hogy ha $-1<a<0$ vagy $0<a<1$, akkor $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{1-a^2}\geq 4$.*

Megoldás. Elegendő igazolni, hogy

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{1-a^2}-4\geq 0,\quad \text{ha}\quad -1<a<1\quad \text{és}\quad a\neq 0.$$

Azonos átalakításokkal

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{1-a^2}-4\equiv\frac{1-a^2+a^2-4a^2(1-a^2)}{a^2(1-a^2)}\equiv\frac{\left(2a^2-1\right)^2}{a^2(1-a^2)}.$$

$\frac{\left(2a^2-1\right)^2}{a^2(1-a^2)}\geq 0$, hiszen $\left(2a^2-1\right)^2\geq 0$ és $a^2(1-a^2)>0$. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a^2=\frac{1}{2}$, azaz ha $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ vagy $a=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. *Az $x^2+y^2=9$ és az $(x-4)^2+(y-8)^2=1$ egyenletű körök középpontját összekötő szakasz mely pontjából húzható közös érintő a két körhöz? Írjuk fel az érintőegyenesek egyenletét.*

Megoldás. Készítsünk ábrát. Erről leolvasható, hogy az $x=3$ egyenletű egyenes közös érintő. Ez a középpontokat összekötő $y=2x$ egyenletű egyenest a $P_0(3;6)$ pontban metszi. (A P_0 pont a $C_1(0;0)$ és $C_2(4;8)$ pontokat összekötő szakasznak az a pontja, amelyre $\frac{C_1P_0}{C_2P_0}=3$, azaz $\overrightarrow{OP_0}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OC_2}=\frac{3}{4}(4;8)=(3;6)$.) A másik közös érintő egyenletét a szerkesztés módszerével, vagy paraméteresen, vagy trigonometria alkalmazásával is megkaphatjuk.

A másik érintőnek van meredeksége, egyenletét $y-6=m(x-3)$ alakban keressük. A közös érintő a körök középpontjától sugárnyi távolságban halad, tehát az origó és az $mx-y+6-3m=0$ egyenes távolsága 3, azaz

$$3=\frac{|6-3m|}{\sqrt{m^2+1}},\quad \text{ahonnan}\quad m=\frac{3}{4}.$$

A másik érintő egyenlete: $3x-4y+15=0$.

5. *Határozzuk meg $\frac{y}{x}$ értékét, ha*

$$a)\quad \lg^2 y+\lg^2 x-2\lg y\cdot\lg x-\lg y+\lg x=2;\qquad b)\quad \cos\frac{y+2x}{2x}=\cos\frac{y-2x}{2x}.$$

Megoldás. a) Azonos átalakításokkal $(\lg y - \lg x)^2 - (\lg y - \lg x) - 2 = 0$, ahonnan $\lg y - \lg x = 2$ vagy $\lg y - \lg x = -1$, tehát $\lg \frac{y}{x} = 2$, $\frac{y}{x} = 100$ vagy $\lg \frac{y}{x} = -1$, $\frac{y}{x} = \frac{1}{10}$.

b) $\cos \frac{y+2x}{2x} = \cos \frac{y-2x}{2x}$ pontosan akkor igaz, ha $\frac{y}{2x} + 1 = \frac{y}{2x} - 1 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ vagy $\frac{y}{2x} + 1 = 1 - \frac{y}{2x} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, azaz $2 = 2k\pi$, $k = \frac{1}{\pi}$, ami sohasem teljesül, hiszen $\frac{1}{\pi}$ nem egész szám vagy $\frac{y}{x} = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

6. *Határozzuk meg azoknak a rendezett $(x; y)$ számpároknak a halmazát, amelyek kielégítik a következő egyenletrendszert:*

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{y^2 - 6y + 9} = 1, \qquad |x-2| + y = 4.$$

Megoldás. A $\sqrt{a^2} = |a|$ azonosság alkalmazásával

$$|x-2| + |y-3| = 1,$$

$$|x-2| + y = 4.$$

Az első egyenletből vonjuk ki a másodikat. Ekkor $|y-3| - y = -3$, $|y-3| = y-3$, tehát csak olyan $(x; y)$ számpár lehet megoldás, amelyre $y \geq 3$. Mivel $y = 4 - |x-2|$, azért ha $x \geq 2$, akkor $y = 6 - x$ és $x \leq 3$, ha $x < 2$, akkor $y = x + 2$ és $x \geq 1$. Legyen $x = t$, így $1 \leq t \leq 3$. Az egyenletrendszert az $x = t$, $y = t + 2$, $1 \leq t < 2$ és az $x = t$, $y = 6 - t$, $2 \leq t \leq 3$ számpárok elégítik ki. (A megoldáshalmazhoz tartozó $P(x; y)$ pontok az $y = 4 - |x-2|$ egyenletű grafikonnak azon pontjai, amelyekre $y \geq 3$.)

7. *Egy szabályos háromszög csúcspontjain át egymással párhuzamos egyeneseket húzunk, közülük a középsőnek a két szélsőtől való távolsága 1, illetve 4. Számítsuk ki a szabályos háromszög oldalait.*

Megoldás. Legyen a középső egyenes b, a tőle 1, illetve 4 távolságra haladó párhuzamos a, illetve c. A szabályos ABC háromszög A csúcsa essen az a, B csúcsa a b, C csúcsa a c egyenesre. Természetesen végtelen sok ilyen háromszög létezik, s ezek egybevágók. Helyezzük el az A pontot az a egyenesen, a B-t a b egyenesen úgy, hogy az ABC háromszög körüljárási iránya pozitív legyen. Legyen az A pont vetülete a b egyenesen A_1, a c egyenesen A_2, a B pont vetülete a c egyenesen B_1. Ekkor $BA_1 = B_1A_2 = B_1C + CA_2$. Ha a háromszög oldala a, akkor $BA_1 = \sqrt{a^2 - 1}$, $B_1C = \sqrt{a^2 - 16}$, $CA_2 = \sqrt{a^2 - 25}$, így

$$\sqrt{a^2 - 1} = \sqrt{a^2 - 16} + \sqrt{a^2 - 25}.$$

Négyzetre emeléssel, majd rendezéssel:

$$a^2 - 1 = 2a^2 - 41 + 2\sqrt{(a^2 - 16)(a^2 - 25)},$$

$$40 - a^2 = 2\sqrt{a^4 - 41a^2 + 400},$$

$$40^2 - 80a^2 + a^4 = 4a^4 - 164a^2 + 40^2,$$

ahonnan $a^2 = 28$, $a = 2\sqrt{7}$. A szabályos háromszög oldalának hossza $2\sqrt{7}$.

8. a) *Igazoljuk az $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ egyenlőtlenséget, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$.*

b) *Igazoljuk, hogy a valós számok halmazán értelmezett*

$$f(x) = (x+a)(x+b) + (x+b)(x+c) + (x+c)(x+a)$$

hozzárendelési szabállyal megadott függvénynek a, b és c bármely valós értéke esetén van zérushelye.

c) *Igazoljuk, hogy a valós számok halmazán értelmezett*

$$g(x) = b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2$$

hozzárendelési szabállyal megadott függvénynek nincs zérushelye, ha a, b és c egy háromszög három oldala.

Megoldás. a) Világos, hogy $(a-b)^2 \geq 0$ minden $a, b \in \mathbb{R}$ számra. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a = b$. Így $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$ és $c^2 + a^2 \geq 2ca$, tehát

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca,$$

így valóban

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca,$$

ahol egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a = b = c$.

b) Azonos átalakításokkal $f(x) = 3x^2 + 2(a+b+c)x + ab + bc + ca$. Az f függvénynek pontosan akkor van a, b és c bármely valós értéke esetén zérushelye, ha az $f(x) = 0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa nemnegatív.

A diszkrimináns:

$$D = 4(a+b+c)^2 - 4 \cdot 3(ab+bc+ca),$$

$$D = 4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca),$$

így valóban $D \geq 0$.

c) A $g(x)=0$ egyenlet D_1 diszkriminánsa:

$$D_1 = (b^2+c^2-a^2)^2 - 4b^2c^2 = (b^2+c^2-a^2+2bc)(b^2+c^2-a^2-2bc) =$$

$$= \left((b+c)^2-a^2\right)\left((b-c)^2-a^2\right) = (b+c+a)(b+c-a)(b-c+a)(b-c-a).$$

A háromszög-egyenlőtlenség szerint az első három tényező pozitív, a negyedik negatív, így $D_1 < 0$, a g függvénynek valóban nincs zérushelye. (A koszinusztétel alkalmazásával is dolgozhatunk.)