

A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

1. Legyen A az $S = \{1, 2, \dots, 1\,000\,000\}$ halmaz egy 101 elemű részhalmaza. Bizonyítsuk be, hogy található olyan $t_1, t_2, \dots, t_{100}$ számok az S halmazban, amelyekre az

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\} \quad (j = 1, 2, \dots, 100)$$

halmazok páronként diszjunktak.



Nagy Zoltán Lóránt megoldása. Legyenek az A halmaz elemei $x_1, x_2, \dots, x_{101}$. Az S -beli $t_1, t_2, \dots, t_{100}$ számok pontosan akkor megfelelők, ha akkor és csak akkor teljesül az

$$(*) \quad x_j + t_p = x_k + t_q$$

egyenlőség, ha $p = q$ és $j = k$ ($1 \leq j, k \leq 101$, és $1 \leq p, q \leq 100$).

Teljes indukcióval megadunk egy megfelelő t_n sorozatot. Válasszuk t_1 -et tetszőlegesen S -ből. Legyen $1 \leq n \leq 100$ és tegyük fel, hogy az S -beli $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ számokat már megadtuk a $(*)$ feltétel szerint. Megmutatjuk, hogy t_n is kiválasztható.

$t_n \in S$ pontosan akkor megfelelő, ha

a) $t_n \neq t_i$ ($1 \leq i < n$),

b) $t_n \neq x_j - x_k + t_m$ ($j \neq k$, $1 \leq m < n$).

Az a) feltétel a lehetséges értékek közül $(n-1)$ -et, a b) pedig legfeljebb $101 \cdot 100 \cdot (n-1)$ -et zár ki. Ez összesen legfeljebb

$$(n-1)(101 \cdot 100 + 1) \leq 99(101 \cdot 100 + 1) = (100-1)(100^2 + 100 + 1) = 100^3 - 1.$$

Mivel S -nek 100^3 eleme van, azért marad nem kizárt érték t_n számára, a bizonyítást befejeztük.

2. Határozzuk meg az összes olyan, pozitív egészekből álló (a, b) párt, amire

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

pozitív egész.



Pach Péter Pál megoldása. Azokat az $(a; b)$ pozitív egész számpárokat kell megkeresnünk, amelyekre $n = \frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$ szintén pozitív egész szám.

Vizsgáljuk meg először a $b = 1$ esetet. Ekkor a nevező $2a$, a tört értéke $\frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}$. Ez pontosan akkor egész, ha a páros. Így tetszőleges j pozitív egészre $(2j; 1)$ megoldás és minden más esetben $b > 1$.

Az $n = \frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$ egyenlőségből beszorzás és rendezés után egy a -ban másodfokú egyenletet kapunk: $a^2 - 2nb^2a + nb^3 - n = 0$. Ha fennáll az eredeti egyenlőség, akkor ennek is teljesülnie kell. A másodfokú egyenlet megoldóképletéből a -ra kapjuk, hogy $a = nb^2 \pm \sqrt{n^2b^4 - nb^3 + n}$. Mivel a, b, n pozitív egészek, az egyenlet diszkriminánsának, $(n^2b^4 - nb^3 + n)$ -nek négyzetszámmal kell lennie. Megmutatjuk, hogy a diszkrimináns egy bizonyos értelemben „szomszédos” számok közé szorítható, pontosabban

$$(1) \quad \left(nb^2 - \frac{b+1}{2}\right)^2 < n^2b^4 - nb^3 + n < \left(nb^2 - \frac{b-1}{2}\right)^2.$$

A négyzetre emeléseket elvégezve rendezés után azt kell igazolnunk, hogy

$$-nb^2 + \left(\frac{b+1}{2}\right)^2 < n < nb^2 + \left(\frac{b-1}{2}\right)^2.$$

A felső becslés nyilvánvaló, hiszen $n \geq 1$ és $b > 1$ miatt $\left(\frac{b-1}{2}\right)^2 > 0$. Az alsó becslést rendezzük át:

$$\left(\frac{b+1}{2}\right)^2 < n(b^2 + 1).$$

Mivel $1 < b$, azért $\left(\frac{b+1}{2}\right)^2 < \left(\frac{b+b}{2}\right)^2 = b^2$, ami $n \geq 1$ miatt kisebb, mint a jobb oldal. Ezzel az (1) egyenlőtlenségeket igazoltuk.

Látható, hogy ha b páratlan, akkor (1)-ben a diszkrimináns két szomszédos egész szám négyzete közé esik, tehát nem lehet négyzetszám. Így b szükségképpen páros szám, legyen $b = 2k$.

Vegyük észre, hogy (1)-ből nyilvánvalóan következnek az alábbi, gyengébb becslések is:

$$(2) \quad \left(nb^2 - \left(\frac{b}{2} + 1\right)\right)^2 < n^2b^4 - nb^3 + n < \left(nb^2 - \left(\frac{b}{2} - 1\right)\right)^2.$$

[(1) bal oldalát csökkentettük, a jobb oldalát pedig növeltük.]

Ha b páros, akkor a (2)-ben kapott korlátok másodsomszédos négyzetszámok, közéjük egyetlen négyzetszám esik, így ebben az esetben a diszkrimináns, $n^2b^4 - nb^3 + n = \left(nb^2 - \frac{b}{2}\right)^2$.

Innen azt kapjuk, hogy $n = \left(\frac{b}{2}\right)^2 = k^2$ és a diszkrimináns, $D = (4k^4 - k)^2$. Ekkor $a = nb^2 \pm \sqrt{D} = 4k^4 \pm (4k^4 - k)$, azaz vagy $a = 8k^4 - k$, vagy pedig $a = k$.

A feladat megoldásai tehát a $(2k; 1)$, $(8k^4 - k; 2k)$, $(k; 2k)$ alakú számpárok, ahol k pozitív egész.

Az utóbbi két számpárt ellenőrizve kapjuk, hogy megoldásai a feladatnak.

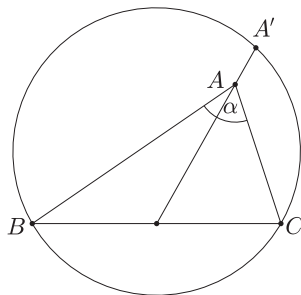
3. Adott egy konvex hatszög, amelyben bármely két szemközti oldalra teljesül a következő tulajdonság: az oldalak középpontjai közötti távolság $\frac{\sqrt{3}}{2}$ -szerese a hosszuk összegének. Bizonyítsuk be, hogy a hatszög valamennyi szöge egyenlő.
(Az $ABCDEF$ konvex hatszögben három szemközti oldalpár van: AB és DE , BC és EF , CD és FA .)



Csóka Endre megoldása. Először igazoljuk az alábbi segédteét:

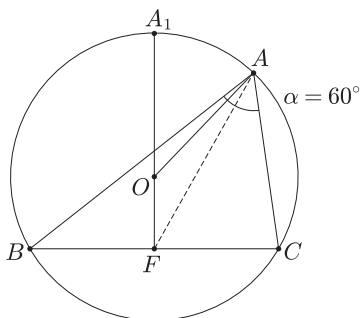
Legyen egy ABC háromszög A csúcsánál α szög, az A -ból induló súlyvonal s , az A -val szemközti oldal pedig a . Ha $\alpha \geq 60^\circ$, akkor $s \leq \frac{\sqrt{3}}{2} a$ és egyenlőség csak szabályos háromszögre teljesül.

Bizonyítás. Föltehető, hogy $\alpha = 60^\circ$, egyébként ugyanis az A -ból induló súlyvonalat az A -n túl meghosszabbíthatjuk addig a látókörig, amelynek pontjaiból a BC szakasz 60° -os szögben látszik (1. ábra). Az A' -ből induló súlyvonal így nő, az A' -vel szemközti oldal hossza továbbra is a .



1. ábra

Legyen tehát $\alpha = 60^\circ$, a BC oldal felezőpontja F , a körülírt kör nagyobbik BC ívének felezőpontja pedig A_1 (2. ábra). Ekkor $A_1F = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ és $AF = s$, így azt kell igazolnunk, hogy $AF \leq A_1F$ és pontosan akkor van egyenlőség, ha $A = A_1$, az ABC háromszög szabályos.



2. ábra

Jelölje O a kör középpontját. Ekkor a háromszög egyenlőtlenség szerint $AF \leq AO + OF = A_1O + OF = A_1F$ és valóban akkor van egyenlőség, ha A_1O és F egy egyenesre esnek, azaz $A = A_1$. Ezzel a segédteét igazoltuk.

Legyenek a hatszög csúcsai pozitív körüljárás szerint betűzve (3. ábra) és tetszőleges PQ szakasz felezőpontját jelölje

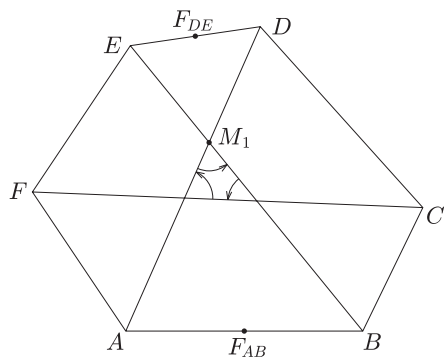
F_{PQ} . Tegyük fel, hogy az AD és BE átlók M_1 metszéspontjára a pozitív AM_1B 60° . A segédtétel szerint

$$(1) \quad \frac{\sqrt{3}}{2}(AB + DE) \geq F_{AB}M_1 + M_1F_{DE},$$

és pontosan akkor van egyenlőség, ha az ABM_1 és a DEM_1 háromszögek szabályosak. A háromszög egyenlőség szerint

a jobb oldal alulról becsülhető:

$$(2) \quad F_{AB}M_1 + M_1F_{DE} \geq F_{AB}F_{DE}, \quad \text{ami a feltétel alapján} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}(AB + DE)$$



3. ábra

Egyenlőség van tehát (1)-ben is és (2)-ben is, így ha hatszögünkben AM_1B

60° , akkor a segédétel szerint AM_1B

60° és az AM_1B , illetve a DEM_1 háromszögek szabályosak. Hatszögünkben tehát mindenképpen legfeljebb 60° -os pozitív irányú forgatás viszi az AD irányát a BE irányába (3. ábra).

Ugyanez igaz BE és CF , illetve CF és DA irányára is. Mivel a három forgatás szögének összege 180° , így mindhárom forgatás pontosan 60° -os. Ekkor a segédétel szerint mindhárom szemköztes oldalpár a végpontjaikat összekötő metsző átlókkal együtt két szabályos háromszöget alkot.

A hatszög minden csúcsában két 60° -os szög jön tehát létre, a hatszög szögei valóban egyenlők.

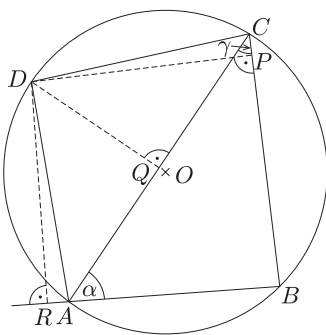
4. Legyen $ABCD$ egy húrnégyszög. A D pontból a BC , CA és AB egyenesekre bocsátott merőlegesek talppontjai

legyenek rendre P , Q és R . Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor teljesül $PQ = QR$, ha az ABC és ADC szögek szögfelezőinek metszéspontja az AC egyenesen van.



Kocsis Albert Tihamér megoldása. A szögfelező tétel szerint az ABC szögfelezője $\frac{AB}{BC}$, az ADC szögfelezője pedig $\frac{AD}{DC}$ arányban osztja AC -t. Ha a két szögfelező az AC -n metszi egymást, akkor ennek a két arálynak meg kell egyeznie. Megfordítva, ha $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} = \lambda$, akkor az AC szakasznak arra az M pontjára, amelyre $\frac{AM}{MC} = \lambda$, MB és MD felezik az ABC , illetve az ADC szögeket. Így azt kell igazolnunk, hogy $PQ = QR$ pontosan akkor teljesül, ha $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$, vagy másképpen a négyszög szemközti oldalainak a szorzata egyenlő.

Legyenek az ABC háromszög szögei α , β és γ . Thalész tétele szerint R és Q rajta vannak az AD átmérőjű körön. Ebben a körben az RQ húr hossza $AD \cdot \sin \angle RAQ = AD \cdot \sin \alpha$. Hasonlóan kapjuk a DC átmérőjű körben, hogy $QP = DC \cdot \sin \gamma$. Így $\frac{PQ}{QR} = \frac{DC \cdot \sin \gamma}{AD \cdot \sin \alpha}$.



Fölhasználva, hogy az ABC háromszögben a szinusz-tétel szerint

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{AB}{BC}, \quad \text{kapjuk, hogy} \quad \frac{PQ}{QR} = \frac{DC \cdot AB}{AD \cdot BC}.$$

Ebből az egyenlőségből leolvasható a bizonyítandó állítás: $PQ = QR$ akkor és csak akkor teljesül, ha a négyszög szemközti oldalainak a szorzata egyenlő.

Megjegyzések. 1. A bizonyításban nem használtuk ki, hogy $ABCD$ húrnégyszög, az állítás igaz a sík tetszőleges négy pontjára. Ismeretes másfelől, hogy húrnégyszögben a P , Q és R pontok egy egyenesen vannak, az ABC háromszög D ponthoz tartozó Simson-egyenesén. Ezt azonban a bizonyítás során nem kellett felhasználnunk.

2. Lehetséges, hogy az ABC és az ADC szögek szögfelezői egybeesnek, így az állítás úgy pontosítható, hogy $PQ = QR$ akkor és csak akkor teljesül, ha a két szögfelezőnek van közös pontja AC -n.

5. Legyen n pozitív egész és legyenek $x_1, x_2, \dots, x_n$ olyan valós számok, amelyekre $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ teljesül.

(a) Bizonyítsuk be, hogy

$$\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j| \right)^2 \leq \frac{2(n^2 - 1)}{3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2.$$

(b) Mutassuk meg, hogy egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x_1, \dots, x_n$ számtani sorozatot alkotnak.



RÁCZ Béla András megoldása. Jelölje a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalát B , jobb oldalát J . Az i és j szerinti szimmetriát kihasználva

$$B = \left[2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_j - x_i| \right]^2 \quad \text{és} \quad J = \frac{2(n^2 - 1)}{3} \cdot 2 \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)^2.$$

Az x_i sorozat rendezése miatt $i < j$ esetén $|x_j - x_i| = x_j - x_i$. Így

$$(1) \quad B = 4 \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \right)^2.$$

Írjuk föl a Cauchy–Schwartz–Bunyakovszkij egyenlőtlenséget az alábbi sorozatokra:

$$\begin{aligned} & (x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_n - x_1, x_3 - x_2, x_4 - x_2, \dots, x_n - x_2, \dots, \\ & (1, 2, \dots, n-1, 1, 2, \dots, n-2, \dots, \\ & \dots, x_{n-1} - x_{n-2}, x_n - x_{n-2}, x_n - x_{n-1}) \\ & \dots, 1, 2, \dots, 1). \end{aligned}$$

Az első sorozat az $x_j - x_i$, a második pedig a megfelelő $j - i$ különbségekből áll.

$$(2) \quad B_1 = \left[\sum_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)(x_j - x_i) \right]^2 \leq \left[\sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)^2 \right] \left[\sum_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)^2 \right] = J_1.$$

A felírt egyenlőtlenség minden valós $x_1, x_2, \dots, x_n$ sorozatra teljesül és pontosan akkor van egyenlőség, ha $\frac{x_j - x_i}{j - i} = d$ állandó minden $j > i$ -re. Ez pedig éppen annak a feltétele, hogy az x_i számtani sorozat legyen. J_1 második tényezője $\sum_{k=1}^{n-1} (n - k) \cdot k^2$ alakba írható, ami a négyzetszámok, illetve a köbszámok összegére vonatkozó ismert összefüggések szerint összegeezhető.

$$n \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k^3 = n \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)^2 n^2}{4} = \frac{n^2(n^2 - 1)}{12}.$$

Így

$$J_1 = \frac{n^2(n^2 - 1)}{12} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)^2 = \frac{n^2}{16} J.$$

Ha belátjuk, hogy (2) bal oldalán $B_1 = \frac{n^2}{16} B$, akkor készen vagyunk, hiszen így $B_1 \leq J_1$ -ből valóban $B \leq J$ következik és az egyenlőség valóban akkor teljesül, ha az $x_1, x_2, \dots, x_n$ számok számtani sorozatot alkotnak.

$$\frac{n^2}{16} B = \frac{n^2}{4} \left[\sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \right]^2 = \left[\sum_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)(x_j - x_i) \right]^2 = B_1$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$(3) \quad \frac{n}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)(x_j - x_i),$$

hiszen a négyzetre emelt összegek tagonként nem negatívak.

Legyen $1 \leq k \leq n$ és tekintsük x_k együttthatóját (3) bal oldalán:

$$p_k = \frac{n}{2} \left(\sum_{i < k} 1 - \sum_{k < j} 1 \right) = \frac{n}{2} [(k-1) - (n-k)].$$

Ugyanez a mennyiség (3) jobb oldalán:

$$q_k = \sum_{i < k} (k-i) - \sum_{k < j} (j-k).$$

A második összeg tagjait (-1) -gyel szorozva és beiktatva a $k-k=0$ tagot

$$q_k = \sum_{i < k} (k-i) + (k-k) + \sum_{k < j} (k-j) = \sum_{i=1}^n (k-i),$$

azaz $q_k = (k-1) + (k-2) + \dots + (k-n) = \frac{n[(k-1) + (k-n)]}{2}$. Látható, hogy $p_k = q_k$, amivel a (3) azonosságot igazoltuk és a bizonyítást befejeztük.

6. Legyen p prímszám. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan q prímszám, amivel minden n egész számra igaz az, hogy $n^p - p$ nem osztható q -val.



Kiss Demeter megoldása. Adott p prímre legyen q a $\frac{p^p-1}{p-1}$ olyan prímosztója, amelyre $q \not\equiv 1 \pmod{p^2}$.

Ilyen q prímszám létezik, ugyanis

$$\frac{p^p-1}{p-1} = 1 + p + \dots + p^{p-1} \equiv 1 + p \not\equiv 1 \pmod{p^2}$$

és így van olyan prímosztója, amelyik 1-től különböző maradékot ad p^2 -tel osztva. Ez a q osztója (p^p-1) -nek is, tehát $p^p \equiv 1 \pmod{q}$. Ebből egyrészt $(p, q) = 1$ következik, másrészt az, hogy a p rendje¹ $\pmod{q}$ a p osztójaként 1 vagy p .

Megmutatjuk, hogy p rendje $\pmod{q}$ nem lehet 1, azaz $p \not\equiv 1 \pmod{q}$. Ellenkező esetben ugyanis $0 \equiv \frac{p^p-1}{p-1} = 1 + p + \dots + p^{p-1} \equiv p \pmod{q}$, ami ellentmondás.

A p rendje $\pmod{q}$ tehát éppen p . Mivel $(p; q) = 1$, a kis Fermat-tétel szerint $p^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$. Ekkor a p rendje osztója a kitevőnek, $p \mid q-1$, továbbá q választása miatt $p \nmid \frac{q-1}{p}$. Most már készen állunk annak bizonyítására, hogy a talált q prímszámra teljesül a feladat állítása.

¹ Ha a q prímszám nem osztója az r egész számnak, akkor végtelen sok olyan pozitív egész kitevő létezik, amelyre $r^n \equiv 1 \pmod{q}$. E kitevők legkisebbikét az r rendjének nevezik $\pmod{q}$. Igazolható, hogy $r^n \equiv 1 \pmod{q}$ akkor és csak akkor teljesül, ha n , a kitevő, az r rendjének a többszöröse. Ezt a tulajdonságot többször használjuk a bizonyítás során.

Tegyük fel ugyanis, hogy valamilyen n egészre $q \mid n^p - p$, azaz $n^p \equiv p \pmod{q}$. Ekkor $(q, n) = 1$, hiszen láttuk, hogy $(q, p) = 1$. Így a kis Fermat-tétel szerint $n^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$, másrészt indirekt feltevésünkéből

$$n^{q-1} = (n^p)^{\frac{q-1}{p}} \equiv p^{\frac{q-1}{p}} \pmod{q},$$

vagyis

$$1 \equiv p^{\frac{q-1}{p}} \pmod{q}$$

következik. Ez azonban nem lehetséges, hiszen p , ami a p rendje $\pmod{q}$, nem osztója $\frac{q-1}{p}$ -nek. A q prímszám tehát valóban nem osztója $(n^p - n)$ -nek.

