Kőváry Károly igazgató matematikatanár, volt kollégám emlékére

1. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

$$a)\quad \sqrt{5x-6}=2+\sqrt{x-2} \qquad b)\quad \sqrt{5x-5}=2+\sqrt{x-2};$$
$$c)\quad \sqrt{5x-4}=2+\sqrt{x-2}; \qquad d)\quad \sqrt{5x-14}=2+\sqrt{x-2}.$$

2. A konvex $ABCD$ négyszög átlói merőlegesek egymásra, a BD átló felezi az AC átlót. Az $ABC\sphericalangle=120°$, $AC=4\sqrt{3}$, $BD=8$. Számítsuk ki a négyszög területét, oldalait és szögeit.

3. Igazoljuk, hogy ha $-1<a<0$ vagy $0<a<1$, akkor $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{1-a^2}\geq 4$.

4. Az $x^2+y^2=9$ és az $(x-4)^2+(y-8)^2=1$ egyenletű körök középpontját összekötő szakasz mely pontjából húzható közös érintő a két körhöz? Írjuk fel az érintőegyenesek egyenletét.

5. Határozzuk meg $\dfrac{y}{x}$ értékét, ha

$$a)\quad \lg^2 y+\lg^2 x-2\lg y\cdot\lg x-\lg y+\lg x=2; \qquad b)\quad \cos\frac{y+2x}{2x}=\cos\frac{y-2x}{2x}.$$

6. Határozzuk meg azoknak a rendezett $(x;y)$ számpároknak a halmazát, amelyek kielégítik a következő egyenletrendszert:

$$\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{y^2-6y+9}=1, \qquad |x-2|+y=4.$$

7. Egy szabályos háromszög csúcspontjain át egymással párhuzamos egyeneseket húzunk, közülük a középsőnek a két szélsőtől való távolsága 1, illetve 4. Számítsuk ki a szabályos háromszög oldalait.

8. *a*) Igazoljuk az $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$ egyenlőtlenséget, ahol $a,b,c\in\mathbb{R}$.

b) Igazoljuk, hogy a valós számok halmazán értelmezett

$$f(x)=(x+a)(x+b)+(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)$$

hozzárendelési szabállyal megadott függvénynek a, b és c bármely valós értéke esetén van zérushelye.

c) Igazoljuk, hogy a valós számok halmazán értelmezett

$$g(x)=b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2$$

hozzárendelési szabállyal megadott függvénynek nincs zérushelye, ha a, b és c egy háromszög három oldala.