Rábai Imre

1. *Az* (a_n) *sorozatban minden* n *pozitív egész számra*

$$a_n = 2a_{n+1} - a_{n+2} \quad \text{és} \quad a_2 + a_6 = 8.$$

Határozzuk meg a sorozat első 7 *tagjának az összegét.*

Megoldás. Minden pozitív egész n esetén $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$, tehát a sorozat számtani sorozat. Így $a_1 + a_7 = a_2 + a_6 = 8$, az első 7 tag összege pedig

$$7 \cdot \frac{a_1 + a_7}{2} = 28.$$

2. *A* 4 *egység sugarú* k_1 *és* k_2 *körök a* D *pontban érintik egymást. A körök közös átmérőegyenese a* k_1 *kört a* D *és az* A *pontban metszi. A* D *pontra illeszkedő,* AD*-vel* $60°$*-os szöget bezáró egyik szelő a* k_1 *kört a* C*, a* k_2 *kört a* B *pontban metszi* ($C \neq D$, $B \neq D$)*. Határozzuk meg az* ABC *háromszög területét.*

Megoldás. A Thalész-tétel szerint az $ACD\sphericalangle = 90°$. Az ADC derékszögű háromszögben az átfogó $AD = 8$ egység, $ADC\sphericalangle = 60°$, tehát $CD = 4$, $AC = 4\sqrt{3}$ egység. Az ABC háromszög derékszögű, és mivel $CD = DB = 4$ egység, azért $BC = 8$ egység, az ABC háromszög területe

$$T = \frac{8 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3} \quad \text{területegység.}$$

3. *Oldjuk meg az*

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 2\sqrt{x+2y} &= 15, \\ \sqrt{2y-4x} - 1 &= \frac{2}{\sqrt{2y-4x}} \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert, amelyben x *és* y *valós számokat jelölnek.*

Megoldás. Legyen $\sqrt{x+2y} = a$, ahol $a \geq 0$ és $x + 2y \geq 0$ és $\sqrt{2y-4x} = b$, ahol $b > 0$ és $2y - 4x > 0$. Ekkor $a^2 + 2a - 15 = 0$ és $b^2 - b - 2 = 0$, ahonnan $a = 3$ és $b = 2$, $x + 2y = 9$ és $2y - 4x = 4$. Az egyenletrendszer egyetlen megoldása az $x = 1$, $y = 4$ számpár.

4. *Az* ABC *háromszögben* $BAC\sphericalangle = 60°$*. Az* A *csúcsponton átmenő szögfelező egyenes a* BC *oldalt olyan* D *pontban metszi, amelyre* $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{1}{4}$*. Számítsuk ki a háromszög másik két szögét.*

Megoldás. A szögfelező osztásarány tétele szerint $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{4}$. Legyen $ACB\sphericalangle = \gamma$, ekkor $ABC\sphericalangle = 120° - \gamma$, így a szinusztétel alkalmazásával

$$\frac{1}{4} = \frac{\sin\gamma}{\sin(120° - \gamma)}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\gamma + \frac{1}{2}\sin\gamma = 4\sin\gamma, \quad \frac{7}{2}\sin\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\gamma, \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{\sqrt{3}}{7},$$
$$ABC\sphericalangle \approx 106{,}10°, \quad ACB\sphericalangle \approx 13{,}90°.$$

5. *Azon* 200 cm *kerületű húrtrapézok közül, amelyeknek két szöge* $45°$*-os, melyiknek maximális a területe? Mekkora ez a terület?*

Megoldás. Legyen a trapéz magassága x cm, a rövidebb párhuzamos oldal y cm. Ekkor a hosszabb párhuzamos oldal $2x + y$, a szárak hossza $x\sqrt{2}$ cm. A trapéz területe

$$T(x;y) = \frac{2x + 2y}{2} \cdot x, \qquad T(x;y) = (x+y)x.$$

A feltétel szerint $2x + 2y + 2x\sqrt{2} = 200$, ahonnan $x + y = 100 - x\sqrt{2}$, tehát

$$T(x) = x\bigl(100 - x\sqrt{2}\bigr) \quad \text{és} \quad 0 < y = 100 - x\bigl(1 + \sqrt{2}\bigr),$$

tehát $0 < x < 100\bigl(\sqrt{2} - 1\bigr)$.

Teljes négyzetté kiegészítéssel

$$T(x) = \sqrt{2}\bigl(25\sqrt{2}\bigr)^2 - \sqrt{2}\bigl(x - 25\sqrt{2}\bigr)^2.$$

Mivel $0 < 25\sqrt{2} < 100\bigl(\sqrt{2} - 1\bigr)$, azért $T(x)$ akkor maximális, ha $x = 25\sqrt{2}$ cm.

A maximális terület $T = 1250\sqrt{2}$ cm^2. Ez annak a húrtrapéznak a területe, amelynek párhuzamos oldalainak hossza $\left(50 - 25\sqrt{2}\right)$ cm, illetve $\left(50 + 25\sqrt{2}\right)$ cm, a szárak hossza 50 cm.

6. *Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket:*

a)
$$\log_{|x-1|}(x+6) + \log_{\frac{1}{|x-1|}} x < 0;$$

b)
$$\log_{|x-1|}(x+6) + \log_{\frac{1}{|x-1|}} x \geq 0.$$

Megoldás. Az egyenlőtlenségek akkor értelmezhetők, ha

$$x > 0, \quad |x-1| > 0 \quad \text{és} |x-1| \neq 1,$$

azaz ha $0 < x < 1$ vagy $1 < x < 2$ vagy $x > 2$. Vegyük figyelembe, hogy

$$\log_{\frac{1}{a}} b \equiv -\log_a b,$$

ahol $a > 0$, $a \neq 1$ és $b > 0$. Ennek alkalmazásával:

a)
$$\log_{|x-1|}(x+6) < \log_{|x-1|} x;$$

b)
$$\log_{|x-1|}(x+6) \geq \log_{|x-1|} x.$$

a) Ha $0 < |x-1| < 1$, azaz most $0 < x < 1$ vagy $1 < x < 2$, akkor a logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő, tehát $x + 6 > x$, ami minden ilyen x-re teljesül.

Ha $|x-1| > 1$, azaz most $x > 2$, akkor a logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, tehát $x + 6 < x$, ami egyetlen x-re sem teljesül. Az egyenlőtlenség megoldásai a $0 < x < 1$ vagy az $1 < x < 2$ valós számok.

b) Hasonló módon kapható, hogy az $x > 2$ valós számok a megoldások.

7. *Egy négyzet alapú egyenes hasáb alapéle a, oldaléle b egység hosszú, ahol a és b pozitív egész számok. A hasáb felületét befestjük, majd a hasábot egységnyi élhosszúságú kockákra vágjuk. Az így kapott kockák között* 112 db *olyan van, amelyeknek pontosan egy oldallapja festett.*

Határozzuk meg az eredeti hasáb felszínét és térfogatát!

Megoldás. Ha $a \leq 2$ vagy $b = 1$, akkor nincs olyan kis kocka, amelynek csak egy lapja festett, így $a > 2$ és $b \geq 2$.

A hasáb élei mentén elhelyezkedő kis kockáknak legalább két lapja festett, így az egy oldalon festett kockák száma

$$2(a-2)^2 + 4(a-2)(b-2) = 112.$$

Átalakításokkal

$$(a-2)(a+2b-6) = 56,$$

és $a - 2 < a - 2 + 2(b-2) = a + 2b - 6$ és vegyük észre, hogy a két tényező azonos paritású. 56-nak két ilyen felbontása van: $56 = 2 \cdot 28$, illetve $56 = 4 \cdot 14$. Ha $a - 2 = 2$, $a = 4$, akkor $b = 15$; ha $a - 2 = 4$, $a = 6$, akkor $b = 7$, és mindkét megoldás megfelel a feltételeknek.

Ha $a = 4$ és $b = 15$ egység, akkor a hasáb felszíne $A = 2a^2 + 4ab = 272$ területegység, a térfogata $V = a^2 b = 240$ térfogategység, ha $a = 6$ és $b = 7$, akkor a hasáb felszíne $A = 240$ területegység, a hasáb térfogata $V = 252$ térfogategység.

8. *A k valós paraméter mely értékei esetén lesz az*

$$x^4 - (k+3)x^2 + 3k = 0$$

egyenlet négy különböző valós gyöke egy számtani sorozat négy egymást követő tagja?

Megoldás. Az adott egyenlet x^2-re másodfokú, ahonnan $x^2 = 3$ vagy $x^2 = k$. Az eredeti egyenletnek akkor van négy különböző valós gyöke, ha $k > 0$ és a négy gyök: $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{k}$, $-\sqrt{k}$.

A négy gyököt egy növekvő számtani sorozat négy egymás utáni tagjaként kétféleképpen írhatjuk fel attól függően, hogy $k > 3$ vagy $0 < k < 3$.

Az első esetben $-\sqrt{k}$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{k}$, és így

$$2\sqrt{3} = -\sqrt{3} + \sqrt{k}, \quad \sqrt{k} = 3\sqrt{3}, \quad k = 27,$$

a második esetben $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{k}$, $\sqrt{k}$, $\sqrt{3}$, és így

$$2\sqrt{k} = -\sqrt{k} + \sqrt{3}, \quad 3\sqrt{k} = \sqrt{3}, \quad k = \frac{1}{3},$$

Csökkenő sorrendben való felírás nem ad újabb megoldást, ezért $k = 27$ vagy $k = \dfrac{1}{3}$ esetén lesz a megadott negyedfokú egyenlet négy különböző gyöke egy számtani sorozat négy egymást követő tagja.