

Pintér Ferenc

1. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$\left[\frac{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{1-x} - \left(x^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{1}{3}} \right)^{-1} \right]^{-1} \cdot (1 + \sqrt[3]{x}).$$

Megoldás. Áttekinthetőbbé teszi a számolást, ha $\sqrt[3]{x}$ -et új változóval jelöljük. A műveletek elvégzése után 1-et kapunk eredményül.

2. Határozzuk meg az x és y számjegyeket úgy, hogy igaz legyen a következő egyenlőség:

$$3 \cdot \overline{xxxxx} = \overline{yxxxxx} - y.$$

Megoldás. Vezessük be az $a = \overline{xxxxx}$ jelölést. Ekkor a következőt kapjuk:

$$2 \cdot a = \overline{y00000} - y, \quad \text{azaz} \quad 2 \cdot a = 99999y = 9y \cdot 11111.$$

Másrészt $2a = 2x \cdot 11111$, ezért $2x = 9y$. Ebből következik, hogy $x = 9$, $y = 2$.

3. Adott az $ABCD$ rombusz. Az ABD háromszög köré írt R sugarú kör áthalad a BCD háromszögbe írt kör középpontján. Fejezzük ki R segítségével a rombusz területét.

Megoldás. Jelölje O a BCD háromszögbe írt kör középpontját, a pedig a rombusz oldalát. Ekkor a $BAO \sphericalangle = BDO \sphericalangle$, hiszen az OB húrhoz tartozó kerületi szögek. Ebből pedig következik, hogy a BCD háromszög és így az ABD háromszög is szabályos.

Így a rombusz területe: $T_{ABCD} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$, és ha figyelembe vesszük, hogy $a = 2R \cdot \sin 60^\circ$, a területre $T_{ABCD} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot R^2$ adódik.

4. A k paraméter mely értéke esetén lesz a

$$(k^2 - 5k + 3)x^2 + (3k - 1)x + 2 = 0$$

egyenlet egyik gyöke kétszerese a másiknak?

Megoldás. Az egyenlet akkor másodfokú, ha a főegyüttható, $k^2 - 5k + 3 \neq 0$ és akkor vannak valós gyökei, ha $D = (3k - 1)^2 - 8(k^2 - 5k + 3) \geq 0$.

A két feltétel teljesüléséről a kapott k ellenőrzésével is meggyőződhetünk, válasszuk most ezt az utat.

Ha x_1 és x_2 az egyenlet gyökei, akkor a feltétel pontosan akkor teljesül, ha a

$$P = (2x_1 - x_2)(2x_2 - x_1)$$

szorzat nulla. A műveletek elvégzése után $P = 5x_1x_2 - 2(x_1^2 + x_2^2) = 9x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)^2$. A gyökök és együtthatók közötti összefüggések felhasználásával

$$P = \frac{18}{k^2 - 5k + 3} - \frac{2(3k - 1)^2}{(k^2 - 5k + 3)^2} = \frac{2}{(k^2 - 5k + 3)^2}(-39k + 26),$$

így $P = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $k = \frac{2}{3}$.

Ebben az esetben a főegyüttható nem 0 $\left(\frac{1}{9}\right)$, a diszkrimináns pozitív $\left(\frac{1}{9}\right)$, így két gyök létezik.

Megjegyzés: Ha $k = \frac{2}{3}$, akkor az egyenlet $\frac{1}{9}x^2 + x + 2 = 0$, a gyökei -6 és -3 .

5. Az ABC háromszögben a B csúcsnál lévő szög, $\beta = 60^\circ$. Megrajzoljuk az A és C csúcsokból induló szögfelezőket, melyek egymást az O pontban, a szemközti oldalakat pedig a D és E pontokban metszik. Mutassuk meg, hogy $OD = OE$.

Megoldás. Mivel az $AOE \sphericalangle$ az ACO háromszög külső szöge, azért

$$AOE \sphericalangle = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{(180^\circ - \beta)}{2} = 60^\circ.$$

Ez azt jelenti, hogy a $BDOE$ négyszög húrnégyszög. Körülírt körének B pontjából a DO és az EO húrok egyenlő, 30° -os szögben látszanak (BO szögfelező), azért ez a két húr valóban egyenlő.

6. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$0,2^{\log_{0,7} \frac{2x+1}{2x-3}} < 1.$$

Megoldás. A logaritmus értelmezése miatt a tört csak pozitív értéket vehet fel, ez $x < -\frac{1}{2}$, vagy $x > \frac{3}{2}$ esetén teljesül. 1-nél kisebb pozitív alap hatványa akkor és csak akkor kisebb 1-nél, ha a kitevő, $\log_{0,7} \frac{2x+1}{2x-3}$ pozitív. A 0,7 alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton fogyó, így ez pontosan akkor teljesül, ha $\frac{2x+1}{2x-3} < 0,7^0 = 1$. Ez az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $x < \frac{3}{2}$, ezen a halmazon pedig az eredeti kifejezés akkor értelmes, ha $x < -\frac{1}{2}$, így ez a halmaz az egyenlőtlenség megoldása.

7. Egy tetraéderben két szemközti él hossza x , a többi él hossza pedig egységnyi. Számoljuk ki a tetraéder térfogatát, mint az x függvényét! Milyen x érték esetén lesz a tetraéder térfogata a legnagyobb? Mennyi ez a legnagyobb térfogat?

Megoldás. Legyen $ABCD$ az adott tetraéder, $CD = AB = x$, M és N az AB és CD élek felezőpontja.

Mivel AN és BN egy-egy egyenlő szárú háromszög súlyvonala és így magassága is, azért $AN \perp CD$ és $BN \perp CD$, a CD él merőleges az ABN síkra és így az abban fekvő NM egyenesre. Hasonló indokkal kapjuk, hogy $NM \perp AB$.

Az elmondottakból következik, hogy $V_{ABCD} = \frac{1}{3} T_{ABN} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{6} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{MN}$, ahol T_{ABN} az ABN háromszög területét jelöli.

A Pitagorasz-tétel alkalmazásával

$$\overline{MN}^2 = \overline{BN}^2 - \overline{BM}^2 = \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) - \frac{x^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{2}$$

adódik. Így $V = \frac{1}{12} \cdot x^2 \cdot \sqrt{4 - 2x^2}$, ahol $0 < x < \sqrt{2}$. A $V > 0$ térfogat legnagyobb értéke nyilván ugyanazon x értéknél van, mint a $12^2 V^2(x) = x^4(4 - 2x^2)$ függvény legnagyobb értéke.

Utóbbi meghatározására használjuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$x^4(4 - 2x^2) = x^2 \cdot x^2 \cdot (4 - 2x^2) \leq \left(\frac{x^2 + x^2 + 4 - 2x^2}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3,$$

egyenlőség akkor van, ha $x^2 = 4 - 2x^2$, ahonnan $x^2 = \frac{4}{3}$ adódik, ami lehetséges.

Így a térfogat $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ esetén lesz a legnagyobb, értéke pedig $V_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{27}$.

8. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög AA_1 és BB_1 súlyvonalai akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, ha a szokásos jelölésekkel:

$$\operatorname{ctg} \gamma = 2(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta).$$

Megoldás. A koszinusztétel, illetve a $2T = bc \sin \alpha$ összefüggés felhasználásával (T az ABC háromszög területe) $\cos \alpha = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$ és $\sin \alpha = \frac{2T}{bc}$, ahonnan $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{4T}$. Így

$$\begin{aligned} 2(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) - \operatorname{ctg} \gamma &= 2 \left(\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{4T} + \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{4T} \right) - \frac{-c^2 + a^2 + b^2}{4T} = \\ &= \frac{1}{4T} (5c^2 - a^2 - b^2). \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy ez az érték akkor és csak akkor nulla, ha az AA_1 és BB_1 súlyvonalak merőlegesek.

Ha S a háromszög súlypontja, akkor Thalész tétele szerint az ASB szög akkor és csak akkor derékszög, ha $AB = 2SC_1$, ahol CC_1 a C -ből induló súlyvonal, tehát $c = \frac{2}{3}s_c$, vagyis $c^2 - \frac{4}{9}s_c^2 = 0$.

A súlyvonal-tétel szerint $4s_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$, tehát

$$c^2 - \frac{4}{9}s_c^2 = c^2 - \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{9} = \frac{2}{9}(5c^2 - a^2 - b^2).$$

Azt kaptuk, hogy mind az AA_1 , BB_1 súlyvonalak merőlegessége, mind pedig a $2(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) = \operatorname{ctg} \gamma$ összefüggés az $a^2 + b^2 = 5c^2$ egyenlőséggel ekvivalens, amiből a bizonyítandó állítás következik.