Besenyei Ádám (Budapest)

A „folytonos görbe” kifejezés hallatán hajlamosak vagyunk először egy, a szó szoros értelmében egybefüggően megrajzolható „vonalra” gondolni. A görbe fogalma azonban a vártnál bonyolultabb, és a róla alkotott naiv elképzeléshez képest számos meglepetést tartogat a számunkra. Giuseppe Peano (1858–1932) olasz matematikus 1890-ben egyik dolgozatában olyan görbére mutatott példát, amely – szemléletünknek igencsak ellentmondva – a síkon egy négyzet minden pontján áthalad. Azóta több konstrukció is született ilyen görbékre, melyeket szokás Peano-görbének is hívni. A következőkben kétféle módon bizonyítjuk Peano-görbe létezését, és megvizsgáljuk bizonyos tulajdonságait. A görbe megrajzolására persze – éppen jellemző tulajdonsága folytán – semmiképpen sem vállalkozhatunk.

Először ismerkedjünk meg a görbékkel kapcsolatos alapvető fogalmakkal.

Egy $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}^2$ folytonos függvényről azt mondjuk, hogy egy *görbét* reprezentál a síkon, magát f-et pedig a görbe egy paraméterezésének hívjuk. Például az $y = x$ egyenletű egyenes $[0;4]$ intervallum „fölötti” szakaszának kétféle paraméterezése a következő:

$$[0;4] \to \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto (t;t) \quad \text{vagy} \quad [0;2] \to \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto \left(t^2;t^2\right)$$

és ezen kívül még sok más. Természetesen hasonlóan értelmezhetünk görbéket a 3 dimenziós térben (sőt sokkal általánosabb terekben) is, $\mathbb{R}^2$ helyett $\mathbb{R}^3$ módosítással.

1. feladat. *Adjuk meg az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű kör egy paraméterezését.*

1. A Peano-görbe egy konstrukciója

A most következő konstrukcióhoz szükségünk van egy (önmagában is érdekes) új fogalom, a *Cantor-halmaz* bevezetésére. Képezzük a C_n halmazokat a következő módon: C_0 legyen a $[0;1]$ intervallum. C_0-ból elhagyva a nyílt $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ intervallumot, C_1-et kapjuk. Hagyjuk el C_1-ből az $\left(\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right)$ és $\left(\frac{7}{9};\frac{8}{9}\right)$ intervallumokat, így kapjuk C_2-t. Általában, ha adott C_{n-1}, akkor C_n álljon azon 2^n db $\frac{1}{3^n}$ hosszú zárt intervallumból, amelyek C_{n-1} intervallumaiból a „középső” nyílt harmadok elhagyásával keletkeznek. Jelölje C a „végül megmaradó” részt, vagyis a C_i halmazok közös részét. Szokás C-t Cantor-féle triadikus halmaznak is nevezni.

2. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy a Cantor-halmaz kontinuum számosságú. (Segítség: figyeljük meg a 4. állításban definiált függvényt, és használjuk fel a következő állítást is.)*

1. állítás. *Pontosan azok az x számok vannak a Cantor-halmazban, amelyeknek van olyan $x = 0{,}a_1a_2a_3\dots a_n\dots$ hármas számrendszerbeli előállítása, ahol a_i 0 vagy 2 (azaz sohasem 1) minden i-re.*

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy C_n-ben pontosan azok a számok vannak, amelyeknek van olyan triadikus – azaz hármas számrendszerbeli – előállítása, melyben az első n helyen csak a 0, 2 jegyek állnak. Innen azonnal adódik az állítás.

Világos, hogy a C-beli számok 0, 2 jegyekkel való előállítása egyértelmű. Ugyanis, ha egy ilyen számnak lenne kétféle előállítása, akkor a legelső különböző jegy az egyikben 0, a másikban pedig 2. Ekkor viszont a két előállítás különbségére (ami persze 0)

$$\begin{aligned} &0{,}a_1a_2a_3\dots 2\dots - 0{,}a_1a_2a_3\dots 0\dots \geq \\ &\geq 0{,}a_1a_2a_3\dots 2 - 0{,}a_1a_2a_3\dots 1 = 0{,}000\dots 1 \end{aligned}$$

teljesül, ami lehetetlen. Ennek alapján a továbbiakban a Cantor-halmaz elemeire úgy tekinthetünk, mint a 0 és 1 közötti, a hármas számrendszerben a 0 és a 2 jegyekkel felírt számokra. Értelmezzük ezek után a következő függvényt:

$$f\colon C \to C^2 \quad 0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6\dots \mapsto (0{,}a_1a_3a_5\dots\ ;\ 0{,}a_2a_4a_6\dots),$$

ahol a_i 0 vagy 2 minden i-re.

2. állítás. *Az előbb definiált f függvény folytonos a Cantor-halmazon.*

A bizonyításhoz szükségünk lesz egy segédállításra, először azt igazoljuk.

1. lemma. *Ha az x_1 és x_2 Cantor-halmazbeli számokra $|x_1 - x_2| < \dfrac{1}{3^n}$ teljesül, akkor x_1 és x_2 „harmadosvessző” utáni első n jegye megegyezik.*

A lemma bizonyítása. Tegyük fel (indirekt), hogy csak az első k ($k < n$) jegyük azonos. Ekkor viszont

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &= |0{,}a_1a_2a_3\dots a_k2\dots - 0{,}a_1a_2a_3\dots a_k0\dots| \geq \\ &\geq |0{,}a_1a_2a_3\dots a_k2 - 0{,}a_1a_2a_3\dots a_k1| = \frac{1}{3^{k+1}} \geq \frac{1}{3^n}. \end{aligned}$$

Ez pedig ellentmondás.

A 2. állítás bizonyítása. Rögzítsük az $x_0 \in C$ pontot és az ε pozitív számot. Ekkor van olyan n egész szám, melyre $\varepsilon > \dfrac{1}{3^{n-1}}$. Az 1. lemma miatt, ha $|x - x_0| < \delta = \dfrac{1}{3^{2n}}$, akkor x és x_0 első $2n$ harmadosjegye megegyezik. Ekkor viszont $f(x)$ és $f(x_0)$ megfelelő koordinátáiban az első n harmadosjegy ugyanaz (mivel $f(x)$ koordinátáit x jegyeinek a „szétválasztásával” kaptuk). Ez pedig azt jelenti, hogy $f(x)$ és $f(x_0)$ megfelelő koordinátáinak különbsége legfeljebb $\dfrac{1}{3^n}$. Tehát

$$\bigl|f(x) - f(x_0)\bigr| \leq \sqrt{2\frac{1}{3^{2n}}} < \frac{1}{3^{n-1}} < \varepsilon.$$

Vegyük észre azt is, hogy f szürjektív, vagyis értékkészlete a teljes C^2.

Eddig tehát már van egy, a Cantor-halmazból képező folytonos függvényünk, amely teljesen lefedi C^2-et. Már csak annyi van hátra, hogy az értelmezési tartományát kiterjesszük a teljes $[0;1]$ intervallumra, valamint az értékkészletét a $[0;1] \times [0;1]$ halmazra (mindezt persze folytonosan). Ez utóbbihoz vegyük észre, hogy egy Cantor-halmazbeli számhoz egyértelműen hozzárendelhetünk egy kettes számrendszerben felírt $[0;1]$-beli számot. Tekintsük ugyanis az alábbi megfeleltetést:

$$g\colon C^2 \to [0;1] \times [0;1] \quad (0{,}a_1a_3\dots\ ;\ 0{,}a_2a_4\dots) \mapsto (0{,}b_1b_3\dots\ ;\ 0{,}b_2b_4\dots),$$
$$\text{ahol} \quad b_i = \begin{cases} 0, & \text{ha } a_i = 0 \\ 1, & \text{ha } a_i = 2, \end{cases}$$

valamint $0{,}b_1b_3\dots$ és $0{,}b_2b_4\dots$ kettes számrendszerbeli számokat jelentenek.

3. állítás. *A fent definiált g függvény folytonos.*

Bizonyítás. Adott $x_0 = \big(x_0^{(1)}; x_0^{(2)}\big) \in C^2$ és $\varepsilon > 0$. Legyen n egész szám, melyre $\varepsilon > \dfrac{1}{2^{n-1}}$ és $x = \big(x^{(1)}; x^{(2)}\big) \in C^2$. Mivel

$$|x - x_0| = \sqrt{\big(x^{(1)} - x_0^{(1)}\big)^2 + \big(x^{(2)} - x_0^{(2)}\big)^2} \ge \sqrt{\big(x^{(i)} - x_0^{(i)}\big)^2} = \big|x^{(i)} - x_0^{(i)}\big|,$$

azért $|x - x_0| < \dfrac{1}{3^n}$ esetén

$$\big|x^{(i)} - x_0^{(i)}\big| < \frac{1}{3^n} \quad (i = 1, 2).$$

Vagyis, ha $|x - x_0| < \delta = \dfrac{1}{3^n}$, akkor x és x_0 megfelelő koordinátáiban az első n harmadosjegy megegyezik. Ez viszont azt jelenti, hogy $g(x)$ és $g(x_0)$ megfelelő koordinátáiban az első n jegy (a legelső 0-t nem számolva) rendre ugyanaz. Persze itt már előfordulhat, hogy $g(x)$-nek többféle kettes számrendszerbeli előállítása van. Így csak azt mondhatjuk, hogy létezik $g(x)$-nek és $g(x_0)$-nak olyan előállítása, melyre a megfelelő koordinátákban az első n jegy megegyezik. De akkor

$$\big|g(x) - g(x_0)\big| \le \sqrt{2\frac{1}{2^{2n}}} < \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon.$$

Annyit még érdemes megjegyeznünk g-vel kapcsolatban, hogy nyilván szürjektív (a $[0;1] \times [0;1]$-re nézve), de nem injektív, vagyis különböző helyeken vehet föl azonos értékeket.

3. feladat. *Igazoljuk, hogy g nem injektív.*

Vizsgáljuk most meg a $g\big(f(x)\big)$ függvényt! Elmondhatjuk róla, hogy a Cantor-halmazt folytonosan képezi le a teljes $[0;1] \times [0;1]$ halmazra, ami éppen egy egységnégyzet a síkon. A Peano-görbe megalkotásának utolsó lépéseként terjesszük ki a $g\big(f(x)\big)$ függvényt a teljes $[0;1]$ intervallumra! Ehhez meg kell mondanunk, hogy milyen értékeket vegyen fel a $[0;1] \setminus C$ halmazon. Tudjuk, hogy ez éppen azokból a nyílt intervallumokból áll, amelyeket C elkészítésénél „kidobtunk" $[0;1]$-ből. Egy ilyen intervallum legyen például $(a;b)$. Ekkor $g\big(f(x)\big)$ legyen lineáris ezen az intervallumon, azaz $g\big(f\big([a;b]\big)\big)$ legyen a $g\big(f(a)\big)$ és a $g\big(f(b)\big)$ pontokat összekötő szakasz. Könnyen látható, hogy a kapott függvény folytonos marad. Vagyis a kiterjesztett függvény éppen egy Peano-görbe paraméterezése.

1. következmény (Peano). *Létezik* $[0;1] \to [0;1] \times [0;1]$ *folytonos és szürjektív leképezés.*

A bizonyítás végén érdemes egy kicsit eltűnődni azon, hogy miért is kellett bevezetnünk a Cantor-halmazt. Vajon nem lett volna elég, ha egyszerűen a teljes $[0;1]$-en tekintjük a 2. állításban szereplő f „koordináta-szétválasztó" függvényt? A válasz egyszerű: a valós számokon f nem folytonos! Ezt könnyen be is láthatjuk, tekintsük ugyanis például a (tízes számrendszerben felírt) 0,1 számot. Ekkor az $x_n = 0{,}099\ldots9$ sorozatra (ahol a kilences jegyek száma n) $x_n \to \frac{1}{10}$, de

$$f(x_n) = (0{,}099\ldots9\ ;\ 0{,}99\ldots9) \not\to f\left(\frac{1}{10}\right) = \left(\frac{1}{10};0\right).$$

Innen az is látszik, hogy f folytonosságának kulcsa az 1. lemma volt. A valós számokon a lemma megfelelője nem igaz. Attól, hogy két valós szám közel van egymáshoz, még nem feltétlenül azonos az első néhány jegyük.

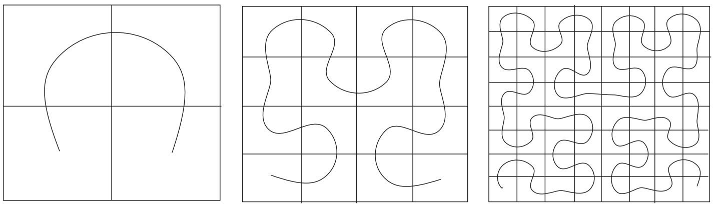
4. feladat. *Van-e olyan görbe, amely teljesen kitölt egy kockát?* (Lásd a hátsó borítót!)

2. A görbe egy másik lehetséges konstrukciója

Ebben a részben David Hilbert német matematikus ötlete alapján állítjuk elő a görbét. Ennek segítségével valamivel szemléletesebb tulajdonságokat is megtudunk a görbéről.

Először is vegyük az $I = [0;1]$ zárt intervallumot a számegyenesen, és a $Q = [0;1] \times [0;1]$ zárt négyzetlapot a síkon. Osszuk fel az intervallumot négy egyenlő részre, a kapott négy zárt intervallum sorrendjük szerint (balról jobbra) számozva I_1^1, I_2^1, I_3^1, I_4^1. Az előbbi négy intervallum mindegyikének négy egyenlő részre osztásával kapjuk az $I_1^2, \ldots, I_{16}^2$ intervallumokat, amelyek ugyancsak balról jobbra számozottak (vagyis az első négy I_1^1-ben, a következő négy I_2^1-ben, stb. van). A fenti eljárást ismételjük újra és újra az egyre kisebb intervallumokkal, így kapjuk az I_j^i intervallumokat. Világos, hogy rögzített i esetén az I_j^i zárt intervallumokból 4^i darab van, mindegyikük hossza 4^{-i}.

Hasonló eljárást alkalmazunk a négyzetre is. Vágjuk szét Q-t négy egybevágó $\frac{1}{2}$ oldalú zárt kis négyzetre. Legyenek ezek $Q_1^1, \ldots, Q_4^1$, a számozást úgy végezve, hogy Q_i^1 és Q_{i+1}^1 $(i < 4)$ szomszédosak legyenek. A fenti kis négyzetek mindegyikének négy egybevágó négyzetre való osztásával keletkeznek a $Q_1^2, \dots, Q_{16}^2$ négyzetek. A számozást úgy végezzük, hogy a $Q_1^2, \dots, Q_4^2$ négyzetek Q_1^1-ben, a $Q_5^2, \dots, Q_8^2$ négyzetek Q_2^1-ben stb. feküdjenek, és egymást követő (alsó) indexűek szomszédosak legyenek. Általában, ha már adott i esetén megvannak a Q_j^i négyzetek $(1 \le j \le 4^i)$, akkor negyedeléssel kapjuk a 2^{-i-1} oldalhosszú zárt Q_j^{i+1} $(1 \le j \le 4^{i+1})$ négyzeteket. Mégpedig úgy, hogy az első négy Q_1^i-ben, a következő négy Q_2^i-ben, és így tovább, az utolsó négy $Q_{4^i}^i$-ben legyen, és szomszédos indexűek szomszédosak legyenek. Gondoljuk meg, hogy ez a számozás mindig elvégezhető. Egy lehetséges számozássorozat első három lépését mutatja az *1. ábra,* a berajzolt vonal mentén haladva a négyzetek sorrendjét. (További ábrák láthatók a hátsó borítón.)



1. ábra

A fenti eljárással kapcsolatban egy fontos észrevételt tehetünk.

4. állítás. *Ha az I_j^i, I_l^k intervallumokra $I_j^i \subset I_l^k$ teljesül, akkor $Q_j^i \subset Q_l^k$. Igaz a megfordítás is: $Q_j^i \subset Q_l^k$ esetén $I_j^i \subset I_l^k$.*

A négyzetek és az intervallumok konstrukciója alapján az állítás világos, belátását az olvasóra bízzuk.

Mielőtt definiálnánk a görbét, szükségünk van még néhány állításra. Legyen $t \in I$ vagy az I egyik végpontja vagy pedig olyan szám, amely egyetlen intervallumnak sem végpontja (melyek az ilyen tulajdonságú számok?). Ekkor minden i-hez egyértelműen létezik j_i úgy, hogy $t \in I_{j_i}^i$. Mivel az $I_{j_i}^i$ intervallumok egymásba vannak skatulyázva, így a 4. állítás értelmében a $Q_{j_i}^i$ négyzetek is egymásba skatulyázottak.

5. állítás. *A $\bigcap_{i=1}^{\infty} Q_{j_i}^i$ halmaz egyelemű.*

Bizonyítás. Tekintsük a négyzetek vetületeit Q egyik vízszintes oldalára. Ezek egymásba skatulyázott zárt intervallumok, így a Cantor-axióma[1] szerint van közös pontjuk. Mivel a négyzetek oldalhossza tetszőlegesen kicsi lehet ($Q_{j_i}^i$ oldalhossza 2^{-i}), így a vetület szakaszok hossza is bármilyen kicsi lehet. Ezért a szakaszok metszete nem tartalmazhat két pontot, mert a két pont távolságánál

[1] A Cantor-axióma a következőt mondja ki: az $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ egymásba skatulyázott zárt intervallumoknak van közös pontja.

rövidebb szakasz legfeljebb csak az egyik pontot tartalmazhatja. Hasonlóan a függőleges vetületeknek is egyértelmű a metszete. Következésképpen a négyzetek metszete is egyelemű, mert különben a fenti metszetek valamelyike vagy üres vagy legalább kételemű lenne. Ezzel az állítást beláttuk.

Most legyen $t \in I$ olyan, amely a k-adik lépésben lett osztópont ($k \geq 1$). Ekkor $i < k$ esetén egyértelműen létezik j_i, melyre $t \in I^i_{j_i}$. Viszont $i \geq k$ esetén pontosan két intervallumban (a határukon) van benne t, ezek indexe szomszédos, j_i és $j_i + 1$. Ekkor a $Q^i_{j_i}$-k egymásba skatulyázott négyzetek, hasonlóan a $Q^i_{j_i+1}$-ek is ($i \geq k$). Ráadásul szomszédos indexű négyzetek szomszédosak, így a_i-vel jelölve $Q^i_{j_i}$ és $Q^i_{j_i+1}$ közös oldalát, az a_i-k szükségképpen egymásba skatulyázott zárt szakaszok. Ekkor a Cantor-axióma miatt van közös pontjuk. Mivel a szakaszok hossza tetszőlegesen kicsi lehet, ezért az is látszik, hogy a közös pont egyértelmű.

Ezek után definiáljuk a $\gamma\colon I \to Q$ görbét a következő módon: minden $t \in I$ pontra legyen $\gamma(t)$ a t pontot tartalmazó intervallumoknak megfelelő négyzetek közös pontja.

6. állítás. *A most definiált γ folytonos és szürjektív leképezés a szakaszról a négyzetre.*

Bizonyítás. Láttuk, hogy $\gamma(t)$ egyértelmű, így γ valóban függvény. A folytonosság igazolásához legyen $t_0 \in I$, amely nem osztópont. Adott $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $k \in \mathbb{N}$, melyre $\sqrt{2} \cdot 2^{-k} < \varepsilon$. Vegyük a t_0-t tartalmazó (egyértelműen meghatározott) $I^k_{i_k}$ intervallumot. Ekkor γ definíciója miatt $\gamma(I^k_{i_k}) \subseteq Q^k_{i_k}$, tehát

$$\left|\gamma(t) - \gamma(t_0)\right| \leq \sqrt{2} \cdot 2^{-k} < \varepsilon \quad (t \in I^k_{i_k}),$$

hiszen $Q^k_{i_k}$ oldalhossza 2^{-k}. Hasonlóan látható be a folytonosság az osztópontokban, ezt nem részletezzük.

Hátra van még a szürjektivitás. Legyen $q \in Q$. Könnyen látható, hogy ekkor létezik (nem feltétlenül egyértelműen) q-t tartalmazó egymásba skatulyázott $Q^i_{j_i}$ négyzetek sorozata. A 4. állítás szerint az $I^i_{j_i}$-k egymásba skatulyázott zárt intervallumok (melyek hossza 0-hoz tart), és így $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} I^i_{j_i} = t_0$ egyértelmű. De ekkor γ definíciója miatt

$$\gamma(t_0) = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q^i_{j_i} = q.$$

2. következmény. *γ Peano-görbe.*

5. feladat. *Mutassuk meg, hogy γ nem injektív.*

A most bemutatott konstrukcióval kapcsolatban érdemes megjegyezni, hogy lehetséges egy másik módon való tárgyalása is. Ennek lényege, hogy γ-t görbék sorozatának határgörbéjeként definiáljuk. Minden felosztáshoz (az *1. ábrához* hasonlóan) hozzárendelhetünk egy görbét, amely minden négyzeten sorrendben áthalad. Megmutatható, hogy e görbék sorozatának létezik határgörbéje, és az Peano-görbe.