

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\log_{x-1}(x-2) \cdot \log_{x-2}(x-3) \cdot \log_{x-3}(x-1) = 1$$

egyenletet.

Megoldás. Csak pozitív számoknak van logaritmus, ezért $x-2 > 0$, $x-3 > 0$, $x-1 > 0$. A logaritmus alapja is pozitív és nem lehet 1, így $x-1 \neq 1$, $x-2 \neq 1$, $x-3 \neq 1$. Összefoglalva: $x > 3$ és $x \neq 4$.

Térjünk át $x-1$ alapú logaritmusra:

$$\log_{x-1}(x-2) \cdot \frac{\log_{x-1}(x-3)}{\log_{x-1}(x-2)} \cdot \frac{\log_{x-1}(x-1)}{\log_{x-1}(x-3)} = 1.$$

Elvégezzük az egyszerűsítéseket: $\log_{x-1}(x-1) = 1$. Az egyenlet értelmezési tartományán ez azonosság, így a megoldás: $x > 3$ és $x \neq 4$.

2. Egy téglatest különböző hosszúságú éleinek aránya $1 : 2 : 3$. Minden élt 4 cm-rel csökkentettük, így 1056 cm²-rel csökkent a felszíne. Mennyivel csökkent a téglatest térfogata?

Megoldás. Ha az eredeti téglatest élei a , $2a$ és $3a$, akkor felszíne:

$$A_1 = 2(2a^2 + 3a^2 + 6a^2) = 22a^2.$$

A másik téglatest élei $a-4$, $2a-4$ és $3a-4$, így a felszíne:

$$A_2 = 2[(a-4)(2a-4) + (a-4)(3a-4) + (2a-4)(3a-4)] = 22a^2 - 96a + 96.$$

A két felszín különbsége: $A_1 - A_2 = 96a - 96 = 1056$, azaz $a = 12$ cm. Az eredeti téglatest élei 12 cm, 24 cm, 36 cm, térfogata: $V_1 = 12 \cdot 24 \cdot 36 = 10\,368$ (cm³), a másik téglatest élei 8 cm, 20 cm és 32 cm, ennek térfogata: $V_2 = 8 \cdot 20 \cdot 32 = 5120$ (cm³).

A téglatest térfogata így 5248 cm³-rel csökkent.

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert az egész számpárok halmazán:

$$\frac{20}{x+y+2} - \frac{6}{3x+y-5} = 1, \quad \frac{12}{x+y} + \frac{21}{3x+y} = 7.$$

Megoldás. A nevező nem lehet 0, így $x+y \neq -2$, $3x+y \neq 5$, $x+y \neq 0$, $3x+y \neq 0$.

Legyen $x+y = a$, $3x+y = b$, ekkor az egyenletrendszer a következő lesz:

$$\left. \begin{aligned} \frac{20}{a+2} - \frac{6}{b-5} &= 1 \\ \frac{12}{a} + \frac{21}{b} &= 7 \end{aligned} \right\}.$$

Az első egyenletet $(a+2)(b-5)$ -tel, a másodikat ab -vel szorozva rendezés után kapjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} -a + 18b - 102 &= ab \\ 12b + 21a &= 7ab \end{aligned} \right\}.$$

Innen $a = \frac{57b-357}{14}$, és b -re a $19b^2 - 184b + 357 = 0$ egyenletet kapjuk, amelynek egyetlen egész gyöke $b = 7$, ahonnan $a = 3$.

Mivel $x+y = 3$ és $3x+y = 7$, azért $x = 2$, $y = 1$. Ez a számpár minden feltételnek eleget tesz, így ez az eredeti egyenletrendszer megoldása.

4. Mutassuk meg, hogy egy háromszög oldalaira akkor és csak akkor teljesül az $a^2b - bc^2 + c^3 = a^2c + b^2c - b^3$ összefüggés, ha a háromszög derékszögű, vagy pedig egyenlő szárú.

Megoldás. Rendezzük az összefüggést 0-ra:

$$a^2b - a^2c + b^3 - b^2c - bc^2 + c^3 = 0.$$

A tagokat párosítva kiemeléseket végezhetünk:

$$\left. \begin{aligned} a^2(b-c) + b^2(b-c) - c^2(b-c) &= 0, \\ (b-c)(b^2 + a^2 - c^2) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Ez a szorzat akkor és csak akkor 0, ha $b-c = 0$ vagy $a^2 + b^2 - c^2 = 0$, vagyis a háromszög vagy egyenlő szárú, vagy derékszögű.

5. Az $x^2 - 6x + 4 = 0$ egyenlet gyökei egy téglalap két oldalának hosszát adják centiméterben. Két nem egybevágó hengernek a tengelymetszete egybevágó ezzel a téglalappal. Határozzuk meg a két henger felszínösszegét és térfogatösszegét.

Megoldás. A feladatot a gyökök kiszámítása nélkül oldjuk meg. A diszkrimináns pozitív, a két gyök szorzata ($x_1 x_2 = 4$) és a két gyök összege ($x_1 + x_2 = 6$) is pozitív, így két különböző pozitív valós gyöke van a másodfokú egyenletnek. Az egyik henger alapkörének átmérője x_1 , a magassága x_2 , a másik henger alapkörének átmérője x_2 , a magassága x_1 . Írjuk fel a felszínösszeget és a térfogatösszeget, az átalakítások után használjuk a gyökök és együtthatók közötti összefüggéseket:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 2 \left(\frac{x_1}{2} \right) \pi \left(\frac{x_1}{2} + x_2 \right) + 2 \left(\frac{x_2}{2} \right) \pi \left(\frac{x_2}{2} + x_1 \right) = \pi \left(\frac{x_1^2}{2} + 2x_1 x_2 + \frac{x_2^2}{2} \right) = \\ &= \pi \frac{(x_1 + x_2)^2 + 2x_1 x_2}{2} = \pi \frac{6^2 + 2 \cdot 4}{2} = 22\pi \approx 69,1 \text{ (cm}^2\text{)}. \\ V_1 + V_2 &= \left(\frac{x_1}{2} \right)^2 \pi x_2 + \left(\frac{x_2}{2} \right)^2 \pi x_1 = \frac{\pi}{4} x_1 x_2 (x_1 + x_2) = \frac{\pi}{4} \cdot 4 \cdot 6 = 6\pi \approx 18,8 \text{ (cm}^3\text{)}. \end{aligned}$$

6. Négy testvér egy konvex négyszög alakú telket örökölt. A telek szemközti oldalainak felezőpontjait összekötve négy négyszögre osztották az örökséget. Az első három testvér rendre 360, 720 és 900 m²-es telket kapott. Mekkora telek jutott a negyediknek?

A feladat nehezebbnek bizonyult, mint ahogy azt a szerkesztőség gondolta, ezért kitűzzük a pontversenyben (ld. 156. oldal).

7. Igazoljuk, hogy ha $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ és $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha = 1.$$

Megoldás. Alakítsuk az egyenlet bal oldalán álló kifejezést:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) = \\ &= \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right) (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{ctg} (\alpha + \beta) (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = \\ &= \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \frac{1}{\operatorname{tg} (\alpha + \beta)} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = \\ &= \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 1. \end{aligned}$$

Ezzel bebizonyítottuk a feladat állítását.

8. Oldjuk meg a valós számok halmazán az $x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 40$ egyenletet.

Megoldás. Az értelmezési tartomány: $x \neq -3$. Végezzük el a következő átalakításokat:

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{6x^2}{x+3} + \frac{9x^2}{(x+3)^2} &= 40 - \frac{6x^2}{x+3}, \\ \left(x - \frac{3x}{x+3} \right)^2 &= 40 - \frac{6x^2}{x+3}, \quad \left(\frac{x^2}{x+3} \right)^2 + \frac{6x^2}{x+3} - 40 = 0. \end{aligned}$$

Ez $\frac{x^2}{x+3}$ -ra másodfokú egyenlet, a két gyöke: 4 és -10. Az első esetben $x_1 = 6$, $x_2 = -2$, a másodikban nem kapunk megoldást.