1. *Egy derékszögű háromszögben a befogók összege* 10,5 *egység, a beírható kör sugara* $\varrho = 1{,}5$ *egység. Számítsuk ki a derékszögű háromszög*

a) körülírt körének sugarát;

b) területét;

c) a hozzáírható körök sugarát.

Megoldás. Legyen a derékszögű háromszög két befogója a és b, az átfogója $c = 2r$, ahol r a körülírt kör sugara. Egy külső pontból a körhöz húzható érintőszakaszok hosszának egyenlőségét felhasználva

a) $2r = c = a - \varrho + b - \varrho = 10{,}5 - 3 = 7{,}5;\quad r = 3{,}75$ egység.

b) A háromszög területe $T = \dfrac{1}{2}ab$. Mivel $c^2 = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$, azért $7{,}5^2 = 10{,}5^2 - 4T;\quad T = 13{,}5$ területegység.

c) A háromszöghöz írható körök sugara rendre $\varrho_a = \dfrac{T}{s-a}$, $\varrho_b = \dfrac{T}{s-b}$, $\varrho_c = \dfrac{T}{s-c}$, ahol s a félkerület hossza. Tudjuk, hogy $ab = 2T = 27$; $a + b = 10{,}5$, amiből $a = 4{,}5$ és $b = 6$, vagy fordítva. Mivel $2s = 10{,}5 + 7{,}5$, azért $s = 9$ egység, ezért $\varrho_a = 3$, $\varrho_b = 4{,}5$ és $\varrho_c = 9$ egység.

2. *Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:*

$$a)\quad \sqrt[3]{x + \frac{x}{x^3-1}} = x \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{x^3-1}};\qquad b)\quad \frac{\log_x \frac{9}{4}}{\log_x \frac{27}{8}} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{27}{8}};$$

$$c)\quad \operatorname{tg}(x+\pi) + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 2\operatorname{tg} x.$$

Megoldás. *a)* Az egyenlet $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ halmazon értelmezett és minden ilyen szám megoldás, mert azonos átalakításokkal mindkét oldalon álló kifejezés $\sqrt[3]{\dfrac{x^4}{x^3-1}}$-gyel azonos.

b) Az egyenlet minden $x > 0$, $x \neq 1$ valós számra értelmezett és minden ilyen szám megoldása az egyenletnek, hiszen $\dfrac{\log_x \frac{9}{4}}{\log_x \frac{27}{8}} = \log_{\left(\frac{3}{2}\right)^3} \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{2}{3}$ és $\dfrac{\frac{9}{4}}{\frac{27}{8}} = \dfrac{2}{3}$.

c) Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + n\pi;\ n \in \mathbb{Z}\right\}$ halmazon értelmezett és itt azonosság, mert azonos átalakításokkal

$$\operatorname{tg}(x+\pi) + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\operatorname{tg} x.$$

3. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán, ahol a valós paraméter:*

$$x - y = 1 - a - a^2;$$
$$\log_x(2x^2 + 4x - y + 1) = 2.$$

Megoldás. A második kifejezés akkor értelmezett, ha

$$x > 0,\quad x \neq 1\quad \text{és}\quad 2x^2 + 4x - y + 1 > 0.$$

Az első egyenletből $y = x + a^2 + a - 1$, a másodikból $2x^2 + 4x - y + 1 = x^2$, $y = x^2 + 4x + 1$, ahonnan

$$x^2 + 3x - a^2 - a + 2 = 0,\quad x_1 = a - 1,\quad x_2 = -a - 2.$$

Ha $x_1 = a - 1$, akkor $a - 1 > 0$ és $a - 1 \neq 1$, tehát $a > 1$ és $a \neq 2$.

Ekkor $y_1 = a^2 + 2a - 2$, és ez a számpár valóban megoldás, hiszen ekkor

$$2x^2 + 4x - y + 1 = (a-1)^2 > 0.$$

Ha $x_2 = -a - 2$, akkor $-a - 2 > 0$ és $-a - 2 \neq 1$, tehát $a < -2$ és $a \neq -3$. Ekkor $y_2 = a^2 - 3$, és ez a számpár is megoldás, hiszen ekkor

$$2x^2 + 4x - y + 1 = (a+2)^2 > 0.$$

4. *Az ABCD húrtrapéz* ($AB \parallel DC$) *rövidebb párhuzamos oldalának hossza,* $DC = 13$ *egység, magassága,* $m = CC_1 = 15{,}6$ *egység* (C_1 *a* C *pont merőleges vetülete az* AB *oldalon), az* AC *átló merőleges a* BC *oldalra. Számítsuk ki a hosszabb párhuzamos oldal* (AB)*, a szárak* (BC) *és az átlók* (AC) *hosszát.*

Megoldás. A feladat szövegében adott jelölés szerint legyen $C_1B = x$, ekkor $AC_1 = x + 13$. Az ACB derékszögű háromszögben a magasságtétel alkalmazásával $x(x+13) = 15{,}6^2$, ahonnan $x = 10{,}4$ egység, tehát $AB = 33{,}8$ egység. A Pitagorasz-tétel alkalmazásával $BC = DA = \sqrt{351{,}52} \approx 18{,}75$ egység, az átlók hossza $AC = BD \approx 28{,}12$ egység.

5. *Az $y = x^2 + x + 1$ egyenletű parabola melyik pontja van a legközelebb az $y = 2x - 2$ egyenletű egyeneshez? Mennyi ez a legkisebb távolság?*

Megoldás. A parabolának az a P pontja van legközelebb az adott egyeneshez, amelyben az adott egyenessel párhuzamos $y = 2x + b$ egyenletű egyenes érinti a parabolát. Az $y = 2x + b$ egyenletű egyenes pontosan akkor érinti az $y = x^2 + x + 1$ egyenletű parabolát, ha az $x^2 + x + 1 = 2x + b$ egyenlet diszkriminánsa nulla: $x^2 - x + 1 - b = 0$, $D = 1 - 4(1 - b) = 0$, $b = \frac{3}{4}$. Ekkor $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$, az érintési pont $P\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{4}\right)$. A legkisebb távolság: $\frac{11}{4\sqrt{5}}$ egység.

6. *Az ABC háromszögben $AC = 8$, $BC = 24$, a C csúcsból induló belső szögfelezőszakasz, $CC_1 = 6\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ egység. Számítsuk ki az ACB szöget, a háromszög területét és az AB oldal hosszát.*

Megoldás. Legyen az $ACB\sphericalangle = 2\gamma$. Az A ponton át a CC_1-gyel párhuzamos egyenes a BC egyenest a D pontban metszi. Mivel

$$DAC\sphericalangle = ACC_1\sphericalangle = \gamma \quad \text{és} \quad ADC\sphericalangle = C_1CB\sphericalangle = \gamma,$$

azért $DC = AC = 8$ egység és $AD = 16\cos\gamma$. $DAB\triangle \sim CC_1B\triangle$, tehát

$$\frac{16\cos\gamma}{6\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{8 + 24}{24}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}, \quad \gamma = 67{,}5°, \quad 2\gamma = 135°.$$

A háromszög területe $T = \frac{8 \cdot 24 \cdot \sin 135°}{2} = 48\sqrt{2}$ területegység, $AB^2 = 8^2 + 24^2 + 2 \cdot 8 \cdot 24 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$, $AB \approx 30{,}19$ egység.

7. *Tekintsük az $x \mapsto \frac{x}{x^2 + x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$ függvényt. Határozzuk meg a függvény értékkészletét. Mely x helyen veszi fel a függvény a legkisebb, illetve a legnagyobb értékét?*

Megoldás. A függvény azokat a $k \in \mathbb{R}$ értékeket veszi fel, amelyekre az

$$\frac{x}{x^2 + x + 1} = k$$

egyenletnek van valós megoldása. $x^2 + x + 1 > 0$ minden valós számra, hiszen

$$x^2 + x + 1 \equiv \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

A $kx^2 + (k - 1)x + k = 0$ egyenletnek pontosan akkor van valós megoldása, ha az egyenlet diszkriminánsa

$$D = (k - 1)^2 - 4k^2 \geq 0.$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha $-1 \leq k \leq \frac{1}{3}$. A függvény értékkészlete a $\left[-1; \frac{1}{3}\right]$ intervallum. A legkisebb értékét (ez -1) az $x_1 = -1$ helyen, a legnagyobb értékét (ez $\frac{1}{3}$) az $x_2 = 1$ helyen veszi fel.

8. *Legyen az (a_n) számtani sorozat n. tagja a_n, k. tagja a_k, az első n tag összege S_n, az első k tag összege S_k, valamint $a_1 \neq 0$, $n \neq 1$, $k \neq 1$ és $n \neq k$.*

Igazoljuk, hogy

$$\frac{S_n}{S_k} = \frac{n^2}{k^2} \tag{1}$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\frac{a_n}{a_k} = \frac{2n - 1}{2k - 1}. \tag{2}$$

Megoldás. Azt kell belátni, hogy ha (1) teljesül, akkor (2) is, és fordítva, ha (2) teljesül, akkor (1) is.

Ha a sorozatban

$$\frac{\frac{n}{2}\big(2a_1 + (n-1)d\big)}{\frac{k}{2}\big(2a_1 + (k-1)d\big)} = \frac{n^2}{k^2},$$

akkor átalakításokkal $2a_1(k - n) = d(k - n)$, s mivel $k \neq n$, $d = 2a_1$. Így

$$\frac{a_n}{a_k} = \frac{a_1 + (n-1) \cdot 2a_1}{a_1 + (k-1) \cdot 2a_1} = \frac{2n - 1}{2k - 1},$$

hiszen $a_1 \neq 0$. Ha pedig $\dfrac{a_1+(n-1)d}{a_1+(k-1)d} = \dfrac{2n-1}{2k-1}$, akkor azonos átalakításokkal $d = 2a_1$ adódik ($k \neq n$), tehát valóban

$$\frac{S_n}{S_k} = \frac{\frac{n}{2}\big(2a_1+(n-1)\cdot 2a_1\big)}{\frac{k}{2}\big(2a_1+(k-1)\cdot 2a_1\big)} = \frac{n^2}{k^2}.$$