

1. Az (a_n) sorozat tagjai azok a pozitív egész számok, amelyek 8-cal osztva 5-öt adnak maradékul, a (b_n) sorozat tagjai azok a pozitív egész számok, amelyek 6-tal osztva 1-et adnak maradékul. Jelöljük S_n -nel és T_n -nel az (a_n) , illetve (b_n) sorozat első n tagjának összegét.

a) Mekkora n , ha $\frac{S_n}{T_n} = \frac{25}{16}$?

b) Melyik az a legkisebb n , amelyre $S_n - T_n > 1000$?

Megoldás. A sorozatok n -edik tagjai $a_n = 5 + (n - 1) \cdot 8 = 8n - 3$, illetve $b_n = 1 + (n - 1) \cdot 6 = 6n - 5$, ezért

$$S_n = \frac{5 + (8n - 3)}{2} \cdot n \equiv 4n^2 + n, \quad \text{illetve} \quad T_n = \frac{1 + (6n - 5)}{2} \cdot n \equiv 3n^2 - 2n.$$

a) $\frac{n(4n + 1)}{n(3n - 2)} = \frac{25}{16}$, ha $n = 6$.

b) $S_n - T_n = n^2 + 3n$, $n^2 + 3n > 1000$, $n > 0$ esetén $n > \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{4009})$, így a legkisebb n a 31.

2. Az A , illetve a B pont helyvektora $\vec{OA} = \mathbf{a}$ és $\vec{OB} = \mathbf{b}$. Az OA szakasz O -hoz közelebbi harmadoló pontja D , az AB szakasz A -hoz közelebbi harmadoló pontja E , a BD és OE egyenesek metszéspontja P . Fejezzük ki \mathbf{a} -val és \mathbf{b} -vel az \vec{OP} és a \vec{PD} vektorokat.

Megoldás. A feltétel szerint $\vec{OD} = \frac{1}{3}\mathbf{a}$, így $\vec{BD} = \frac{1}{3}\mathbf{a} - \mathbf{b}$; $\vec{OE} = \frac{1}{3}(2\mathbf{a} + \mathbf{b})$; $\vec{OP} = \alpha \cdot \frac{1}{3}(2\mathbf{a} + \mathbf{b})$; $\vec{PD} = \beta \left(\frac{1}{3}\mathbf{a} - \mathbf{b} \right)$; és $\vec{OD} = \vec{OP} + \vec{PD}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\mathbf{a} &= \frac{\alpha}{3}(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \beta \left(\frac{1}{3}\mathbf{a} - \mathbf{b} \right), \\ \mathbf{a} &= 2\alpha \cdot \mathbf{a} + \alpha \cdot \mathbf{b} + \beta \cdot \mathbf{a} - 3\beta \cdot \mathbf{b}, \\ (1 - 2\alpha - \beta) \cdot \mathbf{a} &= (\alpha - 3\beta) \cdot \mathbf{b} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Mivel \mathbf{a} és \mathbf{b} nem párhuzamos vektorok, azért $\gamma\mathbf{a} = \delta\mathbf{b}$ akkor és csak akkor, ha $\gamma = 0$ és $\delta = 0$. Ezért $2\alpha + \beta = 1$ és $\alpha = 3\beta$, tehát $\beta = \frac{1}{7}$, $\alpha = \frac{3}{7}$. Így $\vec{OP} = \frac{1}{7}(2\mathbf{a} + \mathbf{b})$ és $\vec{PD} = \frac{1}{21}\mathbf{a} - \frac{1}{7}\mathbf{b}$.

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $\sqrt{1 - 4x + 4x^2} + 2x - 1 = 0$; b) $x^{\log_3 x} = \sqrt[9]{81}$;
c) $\sin 2x + 7 \cos 2x = 1$.

Megoldás. a) $1 - 4x + 4x^2 \equiv (1 - 2x)^2$, $\sqrt{(1 - 2x)^2} = |1 - 2x|$, $|1 - 2x| = 1 - 2x$ pontosan akkor, ha $1 - 2x \geq 0$. Az egyenlet megoldásai az $x \leq \frac{1}{2}$ valós számok.

b) Vegyük mindkét oldal harmas alapú logaritmusát (ez ekvivalens átalakítás), és vegyük figyelembe, hogy $\sqrt[9]{81} = 3^{\frac{4}{9}}$, valamint $(\log_3 x)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$, azaz $\log_3 x = \frac{2}{3}$, vagy $\log_3 x = -\frac{2}{3}$. Az egyenlet megoldásai: $x_1 = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9}$ vagy

$$x_2 = 3^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}.$$

c) Az alábbi egyenletrendszert kell kielégítenie a $\sin 2x$ és a $\cos 2x$ ismeretleneknek:

$$\begin{aligned} \sin 2x + 7 \cos 2x &= 1 \\ \sin^2 2x + \cos^2 2x &= 1 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldásaként $\cos 2x = 0$ és $\sin 2x = 1$, vagy $\cos 2x = 0,28$ és $\sin 2x = -0,96$ adódik, amiből $2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$; vagy $2x = 1,28 + k \cdot 2\pi$, $x_2 = 0,64 + k\pi$.

4. Tekintsük azt a szabályos négyoldalú gúlát, amelynek minden éle egyenlő, és a beírható gömb sugara $\rho = 1$ egység. Számítsuk ki a gúla éleinek a hosszát.

Megoldás. Tekintsük a gúlának azt a síkmetszetét, amely átmegy az alapnégyzet két szemközti élének felező-pontján és a gúla csúcán. Ez a sík a gúlából egy olyan egyenlő szárú háromszöget metsz ki, amelybe írt kör a gömb egy főköre. Legyen a gúla éle a . Ekkor ezen egyenlő szárú háromszög alapja a , szára az oldallapot alkotó egyenlő oldalú háromszög magasságával egyenlő, tehát $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, a beírható kör sugara $\rho = 1$. A háromszög alaphoz tartozó m magasságára:

$$m^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \equiv \frac{2}{4}a^2, \quad m = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

A háromszög területe $T = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$, a háromszög félkerülete $s = \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2}$, mivel $\rho = \frac{T}{s}$, ezért

$$1 = \frac{\frac{a^2\sqrt{2}}{4}}{\frac{a}{2}(1 + \sqrt{3})},$$

ahonnan $a = \sqrt{2}(1 + \sqrt{3})$ egység.

5. Az ABC háromszögben az A csúcsnál levő szög a B csúcsnál levő szög kétszerese, továbbá $6AB = 5BC$, és a háromszög területének mérőszáma az A csúcsnál levő szög szinuszának 62,5-szerese. Számítsuk ki a háromszög oldalait.

Megoldás. A feltétel szerint $\frac{AB}{BC} = \frac{5}{6}$. Legyen $AB = 5x$, ekkor $BC = 6x$, és legyen $AC = b$. Hosszabbítsuk meg az AB oldalt az A -n túl az $AD = b$ szakasszal. Mivel $\angle CAB = 2\angle ABC$, azért ha $\angle ABC = \beta$, akkor $\angle CAB = 2\beta$. A CAB szög a DAC egyenlő szárú háromszög külső szöge, ezért $\angle CDA = \angle DCA = \beta$. A DBC és a DCA egyenlő szárú háromszögek 2-2 szöge β , tehát hasonló. A megfelelő oldalak aránya megegyezik, tehát $\frac{b+5x}{6x} = \frac{6x}{b}$, ahonnan $b^2 + 5xb - 36x^2 = 0$, s mivel $b > 0$, azért $b = 4x$. A területre adott feltétel alkalmazásával

$$\frac{4x \cdot 5x}{2} \cdot \sin \alpha = 62,5 \cdot \sin \alpha,$$

ahonnan $x^2 = 6,25$; $x = 2,5$ ($x > 0$). A háromszög oldalai tehát: $AB = 12,5$; $AC = 10$; $BC = 15$ egység.

6. Írjuk fel annak a $P(-1; -1)$ ponton áthaladó körnek az egyenletét, amely érinti az $x+2y-6=0$ és a $2x-y+3=0$ egyenletű egyeneseket.

Megoldás. A két egyenes merőleges egymásra, metszéspontjuk a $Q(0; 3)$ pont. A $P(-1; -1)$ pont abban a sík-negyedben van, amelynek pontjaira $y \leq 3$. Legyen a keresett kör középpontja $K(u; v)$, sugara r . A K pont az adott egyenesektől egyenlő távolságra van, így $\frac{|u+2v-6|}{\sqrt{5}} = \frac{|2u-v+3|}{\sqrt{5}}$, ahonnan $u-3v = -9$ vagy $3u+v = 3$. Most az utóbbira van szükségünk, tehát $v = 3 - 3u$. A keresett kör egyenlete:

$$(1) \quad (x-u)^2 + (y-(3-3u))^2 = r^2.$$

Az $(u; 3-3u)$ pont a $2x-y+3=0$ egyenletű egyenestől r távolságra van, tehát

$$r = \frac{|2u - (3-3u) + 3|}{\sqrt{5}}, \quad r^2 = 5u^2.$$

A $P(-1; -1)$ pont koordinátái kielégítik az (1) egyenletet:

$$(-1-u)^2 + (-1-(3-3u))^2 = 5u^2,$$

ahonnan $5u^2 - 22u + 17 = 0$, $u = 1$ vagy $u = \frac{17}{5}$. A feltételeknek két kör felel meg, ezek egyenlete: $(x-1)^2 + y^2 = 5$,

illetve $\left(x - \frac{17}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{36}{5}\right)^2 = \frac{289}{5}$.

7. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán, ahol a valós paraméter:

$$a) \quad (a+2) \cdot y + \frac{a}{y-2} = 4a+6; \quad b) \quad (a+2) \cdot 3^x + \frac{a}{3^x-2} = 4a+6.$$

Megoldás. a) $y = 2$ az egyenletnek nem lehet megoldása. Átalakításokkal

$$(a+2)y^2 - (6a+10)y + 9a+12 = 0.$$

Ha $a = -2$, akkor az egyenlet megoldása $y_0 = 3$. Ha $a \neq -2$, akkor $y_1 = 3$, $y_2 = \frac{3a+4}{a+2}$, így y_1 megoldás; míg $y_2 \neq 2$, tehát $a \neq 0$ esetén y_2 is megoldás és $a = 0$ esetén egyetlen megoldás az y_1 .

b) Ha $a = -2$, akkor $3^x = 3$, $x_0 = 1$ a megoldás. Ha $a \neq -2$, akkor $3^x = 3$, $x_1 = 1$ mindig megoldás; míg $3^x = \frac{3a+4}{a+2}$ akkor ad megoldást, ha $\frac{3a+4}{a+2} > 0$ és $\frac{3a+4}{a+2} \neq 2$, azaz $x_2 = \log_3 \frac{3a+4}{a+2}$ akkor megoldás, ha $a < -2$ vagy $-\frac{4}{3} < a < 0$ vagy $a > 0$.

8. Melyek azok a valós számokból álló számpárok, amelyek kielégítik az

$$x\sqrt{\log_x y} = y\sqrt{\log_y x}$$

kétismeretlenes egyenletet?

Megoldás. A logaritmus értelmezése szerint $x > 0$, $x \neq 1$ és $y > 0$, $y \neq 1$ kell, hogy teljesüljön.

Mindkét oldalon álló kifejezés akkor értelmezett, ha $x > 1$ és $y > 1$, vagy $0 < x < 1$ és $0 < y < 1$, hiszen $\log_x y \geq 0$ és $\log_y x \geq 0$ kell, hogy teljesüljön.

Valóban, ha $x > 1$, akkor $y \geq 1$ és $y \neq 1$, tehát $y > 1$, és ha $0 < x < 1$, akkor $0 < y \leq 1$ és $y \neq 1$, tehát $0 < y < 1$. Az egyenlettel ekvivalens egyenletet kapunk, ha mindkét oldalon álló kifejezésnek vesszük az x alapú logaritmusát. $\log_x x^{\sqrt{\log_x y}} \equiv \sqrt{\log_x y}$ és $\log_x y^{\sqrt{\log_y x}} \equiv \sqrt{\log_y x \cdot \log_x y} \equiv \sqrt{(\log_y x \cdot \log_x y) \cdot \log_x y} = \sqrt{\log_x y}$. (Felhasználtuk, hogy $\log_x y > 0$ és $\log_y x \cdot \log_x y = 1$.) Az egyenlet megoldásai pontosan azok az (x, y) számpárok, amelyekre $x > 1$ és $y > 1$, vagy $0 < x < 1$ és $0 < y < 1$. Az egyenlet ezen számpárok halmazán azonosság.