A tanárképző főiskolák 2001. évi Péter Rózsa matematikaversenyén szerepelt a következő feladat, amelyet 2002. áprilisi számában a KöMaL is kitűzött (a megoldás 2002. decemberi számunkban található):

A valós számok halmazán értelmezett f függvényre fennáll, hogy ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2} f(x). \tag{1}$$

Igazoljuk, hogy f periodikus függvény.

A feladat nem nehéz, megoldását mi is vázoljuk. A megoldás után, mint általában, felmerül a kérdés: lehet-e általánosítani. Ehhez persze fogalmazzuk meg, mit is értünk általánosításon! Legyen c valós szám és tekintsük a valós számokon értelmezett f függvényt, amelyre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén:

$$f(x+1) + f(x-1) = c \cdot f(x). \tag{2}$$

Milyen c esetén következik ebből, hogy f periodikus függvény? Mi a helyzet, ha f-ről megkövetelünk bizonyos tulajdonságokat, egyáltalán vannak-e (2)-t kielégítő „szép” függvények? A következőkben ezekre a kérdésekre keressük a választ.

1. Periodicitás

Oldjuk meg először a konkrét $c = \sqrt{2}$ értékre a feladatot! Mindenekelőtt az (1) egyenletet írjuk inkább a többet sejtető $f(x+1) = \sqrt{2}f(x) - f(x-1)$ alakba! Itt x helyére $x+1$-et írva és felhasználva az eredeti egyenletet a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} f(x+2) = \sqrt{2}f(x+1) - f(x) &= \sqrt{2}\big(\sqrt{2}f(x) - f(x-1)\big) - f(x) = \\ &= f(x) - \sqrt{2}f(x-1). \end{aligned}$$

Ezek után írjunk (1)-ben x helyére $(x+2)$-t, és használjuk fel az $f(x+2)$-re és $f(x+1)$-re vonatkozó összefüggéseket. Ekkor

$$f(x+3) = \sqrt{2}\big(f(x) - \sqrt{2}f(x-1)\big) - \big(\sqrt{2}f(x) - f(x-1)\big) = -f(x-1).$$

Innen azonnal látszik, hogy $f(x+7) = -f(x+3) = f(x-1)$, tehát f valóban periodikus, egy periódusa a 8.

Az előbbi gondolatmenet az általános esetben is célra vezet. Vegyük észre ugyanis, hogy ha rögzítünk egy x_0 pontot, akkor a (2) függvényegyenlet ismételt felírásával, és a korábbi eredményeket figyelembe véve kifejezhetjük $f(x_0+n)$-et (n egész szám) $f(x_0+1)$ és $f(x_0)$ segítségével. Az is nyilvánvaló, hogy $f(x_0)$ és $f(x_0+1)$ csak egész n-ekre határozza meg az x_0+n pontokban vett függvényértékeket, a további helyeken fölvett értékekről a feltétel nem mond semmit, tehát $x - x_0$ nem egész, akkor $f(x)$ tetszőleges értéket felvehet. Mindez azt jelenti, hogy pl. a $[0,2)$ intervallumon tetszőlegesen megadott függvény egyértelműen meghatároz egy (2)-t teljesítő periodikus függvényt.

A fentiek alapján világos, hogy amikor a periodicitást vizsgáljuk, akkor általában csak egész periódusokról mondhatunk valamit, mert a nem egész távolságra levő pontokról semmit sem tudunk. (Az persze nyilván igaz, hogy ha egy függvénynek nincs egész periódusa, akkor racionális sincsen.)

Lássunk hozzá a periodicitáshoz kapcsolódó kérdések megválaszolásához! Rögzítsük az x valós számot, ekkor a (2) függvényegyenletben x helyére $(x+n+1)$-et írva (n természetes szám)

$$f(x+n+2)+f(x+n)=c\cdot f(x+n+1).$$

adódik. A $d_n=f(x+n)$ jelöléssel ez a következő alakot ölti:

$$d_{n+2}=c\cdot d_{n+1}-d_n. \tag{3}$$

Célunk, hogy meghatározzuk d_n-et n, d_1 és d_0 segítségével.

Ha d_n minden d_0, d_1 kezdőérték mellett periodikus ugyanazzal a periódussal, akkor világos, hogy minden (2)-t kielégítő függvénynek van egész periódusa, és fordítva.

A (3) egyenletet szokás (homogén) másodrendű lineáris rekurziónak nevezni, így feladatunk (mint az már eddig is látszott) nem függvénytani, hanem inkább diszkrét matematikai. A rekurziók elméletének teljes felépítése meghaladja ezen cikk kereteit, ezért most bizonyítás nélkül csak összefoglalunk néhány eredményt ebből a témakörből.

Az $a_{n+2}=a\cdot a_{n+1}+b\cdot a_n$ (n természetes szám) homogén rekurzióhoz hozzárendelhetjük az $x^2=ax+b$ úgynevezett karakterisztikus egyenletet. Ekkor bizonyítható, hogy ha q_1 és q_2 a karakterisztikus egyenlet különböző valós gyökei, akkor $a_n=Aq_1^n+Bq_2^n$, ahol az n-től független A, B konstansok értékét a_0 és a_1 határozza meg. Ha $q_1=q_2$, akkor $a_n=Aq_1^n+Bnq_1^n$. Az első esetben leírt formula akkor is működik (a komplex gyökökre), ha a karakterisztikus egyenletnek nincs valós gyöke. Ekkor a komplex számok trigonometrikus alakjának segítségével $a_n=Ar^n\cos n\alpha+Br^n\sin n\alpha$ adódik, ahol r és α a karakterisztikus egyenlet gyökeiből számolható, a két együttható pedig a kezdőértékektől függ.

A rövid elméleti áttekintés után térjünk rá a konkrét esetre, és alkalmazzuk a fentieket a (3) rekurzióra.

1. Állítás. *Ha $|c|<2$, akkor d_n általános tagja a következő:*

$$d_n=\frac{2\sin n\alpha}{\sqrt{4-c^2}}d_1-\frac{2\sin(n-1)\alpha}{\sqrt{4-c^2}}d_0, \tag{4}$$

ahol α olyan szög, melyre $\cos\alpha=\dfrac{c}{2}$ és $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}\sqrt{4-c^2}$.

A fenti állítást, ha már valaki „megsúgta” nekünk, indukcióval egyszerűen bizonyíthatjuk, ezt most (és a további két állítás esetében is) mellőzzük. Viszont ezen összefüggés alapján a periodicitás kérdését már könnyen megválaszolhatjuk.

Ha az α szög értéke π-nek racionális többszöröse, akkor van olyan p egész szám, melyre $p\alpha=2k\pi$ ($k\in\mathbb{N}$), és így $d_{n+p}=d_n$ minden n-re a kezdőértékektől függetlenül. Ebben az esetben tehát f biztosan periodikus, és egy periódusa p. Az (1) egyenlet esetében $\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ miatt $\alpha = \frac{\pi}{4}$ nyilván megfelel, ezért $p = 8$. Ezzel visszakaptuk (amit már tudtunk), hogy f egy periódusa a 8.

Könnyen látható, hogy ha α nem teljesíti a kívánt tulajdonságot, akkor pl. a $d_0 = 0$, $d_1 = 1$ kezdőértékekkel sosem kapjuk vissza d_0-t. Ekkor tehát megadható olyan f, amelynek nincs egész periódusa. Sőt, ennél több is igaz. Megadható olyan f is, amely egyáltalán nem periodikus, ráadásul még folytonos is (még akár differenciálható is lehet). Erre vonatkozóan lásd a cikk végén található 1. feladatot.

2. Állítás. *Ha $c = \pm 2$, akkor az általános tag:*

$$\begin{aligned} d_n &= n(d_1 - d_0) + d_0, && \text{ha} \quad c = 2, \\ d_n &= (-1)^{n-1} n(d_1 + d_0) + (-1)^n d_0, && \text{ha} \quad c = -2. \end{aligned}$$

Világos, hogy $c = 2$ esetén d_n periodicitásához $d_0 = d_1$ szükséges és elegendő, ekkor persze d_n konstans sorozat. Ez nyilván azt jelenti, hogy f-nek csak úgy lehet egész periódusa, ha bármely két egész távolságra lévő pontban ugyanazt az értéket veszi fel (tehát a $[0, 1)$-en lévő értékei egyértelműen meghatározzák f-et). Az is látszik, hogy a $c = 2$ esetben $f(x) = x$ is teljesíti a függvényegyenletet, de egyáltalán nem periodikus.

Hasonló a helyzet $c = -2$ esetén, csak most $d_1 = -d_0$ a periódus létezésének feltétele. Ekkor $f(x + 1) = -f(x)$ minden x-re, vagyis f egy periódusa a 2.

3. Állítás. *A $|c| > 2$ esetben d_n általános tagjára:*

$$\sqrt{c^2 - 4}\, d_n = q^{n-1}(qd_1 - d_0) + q^{-(n-1)}(d_0 - q^{-1} d_1), \tag{5}$$

ahol $q = \frac{1}{2}\left(c + \sqrt{c^2 - 4}\right)$.

Két részre bontjuk ezt az esetet, tegyük fel először, hogy $c < -2$. Ekkor nyilván $\frac{1}{q} = \frac{1}{2}\left(c - \sqrt{c^2 - 4}\right) < -1$, így $-1 < q < 0$. Ez azt jelenti, hogy (5) egyik tagja a 0-hoz tart, a másik pedig általában nem korlátos, így d_n nem lehet periodikus. A korlátossághoz mindenképpen $qd_0 = d_1$ kell. Sőt, (5)-ben az indexelést nem 0-tól, hanem 1-től kezdve $qd_1 = d_2$ szükséges. Az indexek állandó eltolásával $d_n = q^n d_0$ adódik, mint szükséges feltétel. De ez is csak akkor lesz korlátos, ha $d_0 = 0$.

Azt kaptuk, hogy csak $d_n \equiv 0$ lesz periodikus, így $c < -2$ esetén a (2)-t teljesítő függvények közül csak az azonosan 0 függvénynek lesz egész periódusa. Még egy észrevételünk, hogy ha az $f \not\equiv 0$ függvény $c < -2$ esetén kielégíti a (2) függvényegyenletet, akkor sem alulról, sem pedig felülről nem korlátos. Valóban, ha d_n legalább egyik kezdőértéke nem nulla, akkor d_n sem alulról, sem felülről nem korlátos (így f sem az).

A $c > 2$ esetet nem részletezzük, teljesen hasonlóan belátható, hogy itt is csak az azonosan 0 függvénynek lesz egész periódusa.

Foglaljuk össze végül, mit is tudtunk meg. Tegyük fel, hogy az f függvény teljesíti a (2) egyenletet. Ekkor $|c| \geq 2$ esetén f nem feltétlenül periodikus. Viszont $|c| < 2$ esetén ha α az a szög, amelyre $\cos\alpha = \frac{c}{2}$, $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{4 - c^2}$ és az $\frac{\alpha}{\pi}$

hányados racionális, akkor f biztosan periodikus (mégpedig egész periódussal), egyébként pedig nem feltétlenül.

Annyit még érdemes megjegyeznünk, hogy ha a (2) egyenletben $x + t$ és $x - t$ szerepel, akkor nyilván hasonlóan oldható meg a feladat. Ekkor persze a periódus nem egész, hanem a t többszöröse.

2. Az elemi függvények esete

Most, hogy már elméletben mindent tudunk a (2)-t kielégítő függvényekről, próbáljunk megadni ilyen függvényeket. Mint korábban láttuk, a $[0, 2)$ intervallumon tetszőlegesen megadott f függvény egyértelműen kiterjed (2)-t teljesítő függvénnyé. Ráadásul, ha f-et a $[0, 2]$-n folytonosan adjuk meg úgy, hogy $x = 1$-ben (2) teljesül, akkor a kiterjesztett f folytonos is lesz (ezt gondoljuk meg). Némi erőfeszítéssel f még differenciálhatóvá is tehető (pl. integrálfüggvény).

Érdemes tehát valamilyen erős megszorítást tennünk f-re. Ehhez szükségünk van egy új fogalomra.

1. Definíció *Az x^α, a^x $(a > 0)$, $\sin x$, $\cos x$ függvényekből algebrai műveletekkel, inverzképzéssel, kompozícióval kapott függvényeket elemi függvényeknek nevezzük.*

Van-e (2)-t kielégítő elemi függvény? Nyilván az azonosan 0 függvény megfelel, ezért azt zárjuk ki. A továbbiakban nevezzük szép függvényeknek a (2)-t teljesítő nemtriviális elemi függvényeket. Keressünk szép függvényeket!

A periodicitás miatt a trigonometrikus függvények juthatnak eszünkbe, ezért vizsgáljuk meg pl. a $\cos x$ függvényt. Ehhez szükségünk lesz a

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

összefüggésre. Ebből rögtön látszik, hogy érdemes f-et $\cos ax$ alakban keresnünk (ahol a valós paraméter), ugyanis ekkor az addíciós formula így alakul:

$$\cos a(x + 1) + \cos a(x - 1) = 2\cos a \cos ax. \tag{6}$$

Nyilvánvaló, hogy $-2 \le c \le 2$ esetén létezik olyan $a \ne 0$ valós szám, melyre $c = 2\cos a$. Ekkor viszont (6) alapján $\cos ax$ szép függvény. (Az $a = 0$-t nem véletlenül hagytuk el: $\cos 0 \equiv 1$ triviális függvény.) Ezzel beláttuk, hogy minden $-2 \le c \le 2$-re létezik (meglehetősen egyszerű) szép függvény. Vegyük észre, hogy $c = \sqrt{2}$ esetén $f(x) = \cos x\frac{\pi}{4}$ adódik, ennek a 8 valóban periódusa. Annak belátását az olvasóra bízzuk, hogy a $\cos x$ helyett a $\sin x$ függvény is megfelel.

A fennmaradó c-ket két részletben vizsgáljuk. A $c > 2$ eset könnyű, a $c < -2$ eset kicsit nehezebb. A rekurzió vizsgálatánál láttuk, hogy ezekben az esetekben f nem lehet korlátos, ráadásul exponenciálisan nő. Kézenfekvő tehát az exponenciális függvény vizsgálata. Legyen $a > 0$ és tekintsük az a^x függvényt. Ekkor

$$a^{x+1} + a^{x-1} = \left(a + \frac{1}{a}\right)a^x. \tag{7}$$

Ismert, hogy a pozitív számok halmazán értelmezett $a+\frac{1}{a}$ mennyiség értékkészlete a $[2,+\infty)$ intervallum (ráadásul minden értéket kétszer vesz fel, kivéve a 2-t, amelyet csak $a=1$-ben). Tehát adott $c>2$-re létezik a, melyre $c=a+\frac{1}{a}$, s így (7) alapján erre az a-ra az $x\mapsto a^x$ függvény kielégíti a (2) összefüggést. Nyilván a $c=2$ esetén adódó $a=1$ is megfelelő, az éppen a konstans 1 függvény.

Hátra van még a $c<-2$ eset vizsgálata. Világos, hogy az exponenciális függvény önmagában nem felel meg, mivel negatív alap valós kitevőjű hatványát nem értelmezzük. Másrészt a rekurzióból tudjuk, hogy f tetszőlegesen nagy pozitív, és tetszőlegesen kicsi negatív értékeket is felvesz. Mindezek alapján (kis próbálkozás után és intuíció révén) az az ötletünk támadhat, hogy „kombináljuk” az előző két esetben kapott függvényeket. Tekintsük tehát az $a^x\cos bx$ függvényt, ahol a,b paraméterek értékét később határozzuk meg (persze $a>0$). Ekkor

$$a^{x+1}\cos b(x+1)+a^{x-1}\cos b(x-1)=a^x\left(a\cos b(x+1)+\frac{1}{a}\cos b(x-1)\right).$$

Legyen $A=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$, így a zárójelben lévő kifejezés a következőképpen alakul:

$$A\cos b(x+1)+A\cos b(x-1)+(a-A)\cos b(x+1)-\left(A-\frac{1}{a}\right)\cos b(x-1),$$

ahol nyilván $a-A=A-\frac{1}{a}$. Addíciós összefüggéseket alkalmazva ez így fest:

$$2A\cos b\cos bx-2(a-A)\sin b\sin bx.$$

Innen már látszik, hogy érdemes b értékét π-nek választani, mert így a második tag eltűnik, az elsőben pedig megjelenik a kívánt $-1(=\cos\pi)$ szorzó. Írjuk fel tehát a kiindulási egyenletet most már az $a^x\cos\pi x$ függvényre:

$$a^{x+1}\cos\pi(x+1)+a^{x-1}\cos\pi(x-1)=2A\cos\pi\cos\pi x=-\left(a+\frac{1}{a}\right)\cos\pi x.$$

Korábban láttuk, hogy tetszőleges $c\le-2$ esetén van olyan $a>0$, melyre $c=-a-\frac{1}{a}$, ekkor pedig az $a^x\cos\pi x$ függvény kielégíti a (2) függvényegyenletet. Ezzel sikerült minden c-re megadnunk szép függvényt.

Utólag már jól látszik, hogy a három esetben kapott függvények nem is állnak olyan távol egymástól. Mindegyik $a^x\cos bx$ alakú, csak az egyik esetben $a=1$, a másikban $b=0$, a harmadikban pedig $b=\pi$. Ezek alapján a feladat megoldását kezdhettük volna azzal, hogy vesszük ezt a függvényt és meghatározzuk a paraméterek megfelelő értékeit. Csak akkor az nem látszott volna, miért éppen ebből a függvényből indultunk ki.

3. Feladatok

Most pedig álljon itt néhány, a fentiekhez kapcsolódó feladat.

1. Tekintsük azt a (2)-t $c = \frac{1}{2}$-del teljesítő f függvényt, melyre $f(x) = 2x$ a $[0, 1]$ intervallumon és $f(x) = 3 - x$ az $[1, 2)$ intervallumon. Bizonyítsuk be, hogy f nem periodikus folytonos függvény.

2. Legyen f olyan valós függvény, amely teljesíti (2)-t. A cikkben megfogalmazott állításokat felhasználva adjuk meg $f(x - n)$-et (n természetes szám) $f(x)$, $f(x - 1)$, és n segítségével.

3. Igaz-e, hogy ha egy függvénynek van periódusa, akkor van legkisebb periódusa is?

4. Adjunk meg a valós számokon értelmezett f (nem konstans) elemi függvényt, melyre

$$f(x + 1) \cdot f(x - 1) = f^{2003}(x).$$

5. Van-e olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nem konstans) elemi függvény, melyre

$$f(x + 1) - f(x - 1) = cf(x),$$

ahol c valós paraméter?

6. Igaz-e, hogy minden c valós szám esetén létezik olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nem konstans) elemi függvény, amely eleget tesz az alábbi függvényegyenletnek:

$$f(x + 1) \cdot f(x - 1) = c \cdot f(x).$$