

1. Egy húr és érintőtrapéz egyik párhuzamos oldalának hossza 10 egység, a beírható kör sugara  $\varrho = 5\sqrt{3}$  egység. Hány százaléka a beírt kör területe a trapéz területének?

**Megoldás.** Belátható, hogy ha egy húr- és érintőtrapéz párhuzamos oldalainak hossza  $2a$ , illetve  $2b$ , a beírható kör sugara  $\varrho$ , akkor  $\varrho^2 = ab$ . (Lássuk be!) Most  $2a = 10$ ,  $\varrho = 5\sqrt{3}$ , tehát  $75 = 5 \cdot b$ , azaz  $b = 15$ ,  $2b = 30$  egység. A beírható kör területe  $T_1 = 75\pi$  területegység, a trapéz területe  $T_2 = \frac{10+30}{2} \cdot 10\sqrt{3} = 200\sqrt{3}$  területegység. Mivel

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{8} \approx 0,680,$$

ezért a beírható kör területe a trapéz területének a 68%-a.

2. Két város távolsága 560 km. Két gépkocsi közül az egyik 1 órával kevesebb idő alatt teszi meg ezt az utat, mint a másik gépkocsi, mert a sebessége  $10 \frac{\text{km}}{\text{óra}}$ -val nagyobb, mint a másiké. Számítsuk ki a gépkocsik sebességét!

**Megoldás.** Jelölje  $v$  a lassabban haladó gépkocsi sebességét, ekkor a gyorsabb gépkocsié  $v + 10$ . A feltétel szerint  $\frac{560}{v} - \frac{560}{v+10} = 1$ , ahonnan  $v_1 = 70$ ,  $v_2 = -80$ . A gépkocsik sebessége 80 km/óra, illetve 70 km/óra.

3. Az  $f: x \mapsto \log_a x$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ) logaritmusfüggvény grafikonjára illeszkedik a  $P(b; -2)$  és a  $Q(16b; 6)$  pont. Határozzuk meg  $a$  és  $b$  értékét, majd írjuk fel a  $PQ$  egyenes egyenletét!

**Megoldás.** A logaritmusfüggvény értelmezése miatt  $b > 0$ . A feltételek szerint  $-2 = \log_a b$  és  $6 = \log_a 16b$ , azaz  $a^{-2} = b$  és  $a^6 = 16b$ , ahonnan  $a = \sqrt{2}$  és  $b = \frac{1}{2}$ , tehát  $P\left(\frac{1}{2}; -2\right)$ ,  $Q(8; 6)$ . A  $PQ$  egyenes egyenlete  $16x - 15y = 38$ .

4. Milyen valós  $x$  értékekre van értelmezve a

$$\frac{\sin 2x + 2 \sin x}{\sin 2x - 2 \sin x} \cdot \frac{2}{\text{tg } \frac{x}{2}}$$

kifejezés és mi az értékkészlete?

**Megoldás.** A kifejezés akkor értelmezhető, ha  $\sin 2x - 2 \sin x \neq 0$  és  $\text{tg } \frac{x}{2}$  értelmezve van, azaz ha  $x \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , tehát  $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ .

Az első tényező:

$$\frac{\sin 2x + 2 \sin x}{\sin 2x - 2 \sin x} \equiv \frac{2(\sin x)(\cos x + 1)}{2(\sin x)(\cos x - 1)} \equiv \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1} \quad (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}),$$

a második tényező:

$$\frac{2}{\text{tg } \frac{x}{2}} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \quad (x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}).$$

Mivel  $\frac{\cos x + 1}{\cos x - 1} \cdot \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \equiv -1$  ( $x \neq k\pi$ ), ezért az értékkészlet a  $\{-1\}$  számhalmaz.

5. Írjuk fel annak a  $P(0; 2)$  ponton átmenő  $\sqrt{8}$  sugarú körnek az egyenletét, amelyet kívülről érint az  $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 8 = 0$  egyenletű kör!

**Megoldás.** Az adott kör egyenlete  $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 2$  alakban írható, tehát középpontja  $K(-1; -3)$  és sugara  $r = \sqrt{2}$ . Legyen a keresett kör középpontja  $C(u; v)$ , akkor egyenlete  $(x-u)^2 + (y-v)^2 = 8$ . A  $P(0; 2)$  pont rajta van ezen a körön, tehát

$$(1) \quad u^2 + (2-v)^2 = 8.$$

A keresett kör középpontja a  $K$  ponttól  $\sqrt{2} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2}$  távolságra van, tehát rajta van az  $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 18$  egyenletű körön, ezért

$$(2) \quad (u+1)^2 + (v+3)^2 = 18.$$

Az (1) és (2) egyenletek alkotta egyenletrendszer megoldásai:

$$u_1 = 2, \quad v_1 = 0 \quad \text{vagy} \quad u_2 = -\frac{34}{13}, \quad v_2 = \frac{12}{13}.$$

A feltételeknek két kör felel meg, ezek egyenlete:

$$(x-2)^2 + y^2 = 8, \quad \text{illetve} \quad \left(x + \frac{34}{13}\right)^2 + \left(y - \frac{12}{13}\right)^2 = 8.$$

6. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$2\sqrt{\log_3 x} + \sqrt{\log_x 3} \geq 3.$$

**Megoldás.** Az egyenlőtlenségben szereplő kifejezések akkor értelmezhetők, ha  $x > 1$ . Legyen  $\sqrt{\log_3 x} = z$ , ekkor  $z > 0$ . Így  $\sqrt{\log_x 3} = \sqrt{\frac{1}{\log_3 x}} = \frac{1}{z}$ , tehát  $2z + \frac{1}{z} \geq 3$ . Mindkét oldalt  $z > 0$ -val szorozva, majd rendezve kapjuk:

$$2z^2 - 3z + 1 \geq 0,$$

ami ( $z > 0$ ) akkor teljesül, ha  $0 < z \leq \frac{1}{2}$  vagy  $z \geq 1$ , azaz  $0 < \sqrt{\log_3 x} \leq \frac{1}{2}$  vagy  $\sqrt{\log_3 x} \geq 1$ , tehát  $0 < \log_3 x \leq \frac{1}{4}$  vagy  $\log_3 x \geq 1$ .

Az egyenlőtlenség megoldásai az  $1 < x < \sqrt[4]{3}$  vagy  $x \geq 3$  valós számok.

7. Egy  $\sqrt{13}$  egység sugarú körbe olyan konvex hatszöget írunk, amelynek három oldala  $2a$ , másik három oldala  $5a$  egység hosszú. Számítsuk ki a hatszög területét!

**Megoldás.** A hatszögnek van olyan csúcsa, ez legyen  $B$ , hogy a két szomszédos csúcs távolsága  $2a$ , illetve  $5a$ . Legyen  $AB = 2a$  és  $BC = 5a$ , a kör középpontja  $O$ . A hosszabb  $AC$  ívhez tartozó középponti szög  $240^\circ$ , így az ehhez tartozó  $ABC$  kerületi szög  $120^\circ$ , így  $AC = 2 \cdot \sqrt{13} \sin 120^\circ = \sqrt{39}$  egység. Az  $ABC$  háromszögben a koszinusztétellel alkalmazásával  $39 = 4a^2 + 25a^2 - 2 \cdot 2a \cdot 5a \cdot \cos 120^\circ$ , ahonnan  $39 = 39a^2$ , tehát  $a = 1$  ( $a > 0$ ).

Legyen az  $AOB$  háromszög  $AB$  oldalához tartozó magasság hossza  $m_1$ , a  $BOC$  háromszög  $BC$  oldalához tartozó magasság hossza  $m_2$ . Ekkor

$$m_1^2 + a^2 = 13, \quad \text{illetve} \quad m_2^2 + \left(\frac{5}{2}a\right)^2 = 13,$$

s mivel  $a = 1$ , ezért  $m_1 = 2\sqrt{3}$  egység,  $m_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$  egység. A hatszög területe

$$T = 3 \left( 1 \cdot 2\sqrt{3} + \frac{5}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{69\sqrt{3}}{4} \text{ területegység.}$$

8. Egy sorozat első tagja  $a_1 = 1$  és  $n \geq 1$  esetén

$$a_{n+1} = \left( 1 - \frac{1}{(n+2)^2} \right) \cdot a_n.$$

Írjuk fel (zárt alakban) a sorozat  $n$ -edik tagját és első  $n$  tagjának szorzatát!

**Megoldás.** A definíció szerint

$$a_1 = 1, \quad a_2 = a_1 \left( 1 - \frac{1}{3^2} \right), \quad \dots \quad a_n = a_{n-1} \left( 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right),$$

Szorozzuk össze ezeket az egyenlőségeket figyelembe véve, hogy  $a_i \neq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

$$(a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1}) \cdot a_n = (a_1 a_2 \cdots a_{n-1}) \left( 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^2 \right) \left( 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^2 \right) \cdots \left( 1 - \left( \frac{1}{n+1} \right)^2 \right).$$

Osszuk el mindkét oldalt  $(a_1 a_2 \cdots a_{n-1})$ -gyel és alkalmazzuk az  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  azonosságot.

$$\begin{aligned} a_n &= \left( 1 - \frac{1}{3} \right) \left( 1 - \frac{1}{4} \right) \cdots \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) \cdot \left( 1 + \frac{1}{3} \right) \left( 1 + \frac{1}{4} \right) \cdots \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right), \\ a_n &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{n}{n+1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{n+2}{n+1}, \end{aligned}$$

Az egyszerűsítések után  $a_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{n+2}{n+1}$ . A sorozat első  $n$  tagjának a szorzata

$$\left( \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \right) \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \right) \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \right) \cdots \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{n+2}{n+1} \right) \equiv \left( \frac{2}{3} \right)^n \cdot \frac{n+2}{2}.$$

(Az állítások teljes indukcióval is beláthatók.)