

Első nap

1. Legyen n pozitív egész szám. Legyen T a sík azon (x, y) pontjainak halmaza, amelyekre x és y nemnegatív egész számok és $x + y < n$. T minden pontját pirosra vagy kékre színezzük. Ha az (x, y) pont színe piros, akkor T minden olyan (x', y') pontjának a színe is piros, amire $x' \leq x$ és $y' \leq y$ mindegyike teljesül. Nevezzük X -halmaznak az olyan halmazokat, amelyek n olyan kék pontból állnak, amelyek x -koordinátái mind különbözőek, és nevezzük Y -halmaznak az olyan halmazokat, amelyek n olyan kék pontból állnak, amelyek y -koordinátái mind különbözőek. Bizonyítsuk be, hogy az X -halmazok száma megegyezik az Y -halmazok számával.

2. Legyen BC az O középpontú Γ kör egy átmérője. Legyen A a Γ kör egy olyan pontja, amire $0^\circ < AOB < 120^\circ$. Legyen D a C -t nem tartalmazó AB ív középpontja. Az O -n keresztül DA -val párhuzamosan húzott egyenes messe az AC egyenest a J pontban. OA felezőmerőlegesének és Γ -nak metszéspontjai legyenek E és F . Bizonyítsuk be, hogy J a CEF háromszög beírt körének a középpontja.

3. Határozzuk meg az összes olyan (m, n) párt, ahol m, n egész számok, amikre $m, n \geq 3$, amelyekhez létezik végtelen sok olyan a pozitív egész szám, amire

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

egész szám.

Második nap

4. Legyen n 1-nél nagyobb egész szám. n összes pozitív osztója $d_1, d_2, \dots, d_k$, ahol $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$. Legyen $D = d_1 d_2 + d_2 d_3 + \dots + d_{k-1} d_k$.

(a) Bizonyítsuk be, hogy $D < n^2$.

(b) Határozzuk meg az összes olyan n számot, amire D osztója n^2 -nek.

5. Határozzuk meg az összes olyan f függvényt, ami a valós számok $\mathbf{R}$ halmazát önmagába képezi és amire

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

teljesül minden $x, y, z, t \in \mathbf{R}$ esetén.

6. Legyenek $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ egységsugarú körök a síkban, ahol $n \geq 3$. Jelölje a középpontjaikat rendre $O_1, O_2, \dots, O_n$. Tegyük fel, hogy nincs olyan egyenes, aminek kettőnél több körrel van közös pontja. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{O_i O_j} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$