**1.** *Az $ABCD$ trapézban az $A$ és a $D$ csúcsoknál derékszög van, az $AC$ és a $BD$ átlók merőlegesek egymásra és $4AB = 9CD$. Határozzuk meg az átlók hosszának az arányát!*

**I. megoldás.** Legyenek a trapéz csúcsai $A(0;0)$, $B(9a;0)$, $C(4a;m)$ és $D(0;m)$. Az $\overrightarrow{AC}(4a;m)$ és $\overrightarrow{BD}(-9a;m)$ vektorok merőlegesek, skaláris szorzatuk 0, így $-36a^2 + m^2 = 0$. Ezt felhasználva: $\frac{BD^2}{AC^2} = \frac{81a^2 + m^2}{16a^2 + m^2} = \frac{117a^2}{52a^2}$. Így $\frac{BD}{AC} = \frac{3}{2}$.

**II. megoldás.** A $C$ csúcson át $BD$-vel párhuzamosan rajzolt egyenes és $AB$ metszéspontját jelöljük $E$-vel. Az $AEC$ derékszögű háromszögben a befogótételt fölírva: $AC^2 = 4a \cdot 13a$, $BD^2 = EC^2 = 9a \cdot 13a$, amelyekből az előző eredményhez jutunk.

**2.** *Oldjuk meg az*

$$\frac{x-14}{2} + \frac{x-12}{4} + \frac{x-10}{6} = \frac{x-8}{8} + \frac{x-6}{10} + \frac{x-4}{12} + \frac{x-16}{p}$$

*egyenletet, ahol a $p$ 0-tól különböző valós paraméter.*

**Megoldás.** Az egyenlet mindkét oldalából 3-at elvéve:

$$\frac{x-14}{2} - 1 + \frac{x-12}{4} - 1 + \frac{x-10}{6} - 1 = \frac{x-8}{8} - 1 + \frac{x-6}{10} - 1 + \frac{x-4}{12} - 1 + \frac{x-16}{p}.$$

Ebből az

$$(x-16) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{p}\right) = (x-16)\left(\frac{73}{120} - \frac{1}{p}\right) = 0$$

egyenlethez jutunk. $p = \frac{120}{73}$ esetén végtelen sok megoldás van, $p \neq \frac{120}{73}$-ra az $x = 16$ érték adódik.

**3.** *Írjuk föl annak a körnek az egyenletét, amely átmegy az $A(0;9)$ és a $B(7;2)$ pontokon és érinti az $x$ tengelyt.*

**I. megoldás.** A keresett kör középpontja rajta lesz a szakasz felezőmerőlegesén, az $x - y = -2$ egyenesen. A középpont így $(r-2;r)$.

Ennek az $A$-tól való távolsága $r$, így a $B$ koordinátáit helyettesítve

$$(r-2)^2 + (r-9)^2 = r^2.$$

Ebből az $r = 5$ és $r = 17$ értékeket kapjuk.

A keresett körök egyenlete:

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25, \quad \text{illetve} \quad (x-15)^2 + (y-17)^2 = 289.$$

**II. megoldás.** Az $AB$ egyenes egyenlete $x + y = 9$, ez az $x$ tengelyt a $(9;0)$ pontban metszi. E pontnak a körre vonatkozó hatványa $2 \cdot \sqrt{2} \cdot 9 \cdot \sqrt{2} = 36$. Ebből az $x$ tengelyen lévő érintési pontok: $9 - 6 = 3$, illetve $9 + 6 = 15$.

**4.** *Egy gúla alaplapja olyan trapéz, melynek három oldala 6 egység hosszú, a negyedik pedig 12 egységnyi. A gúla oldalélei az alapsíkkal egyenlő szögeket zárnak be. Mekkora ez a szög, ha a test térfogata 162 térfogategység?*

**Megoldás.** Legyen az alaplapon $AB = 12$, $BC = CD = DA = 6$, az alaplapon kívüli csúcs $E$. Húzzunk párhuzamost a $C$ csúcson át $AD$-vel, ennek $AB$-vel való metszéspontja legyen $T$. Az $ATCD$ négyszög rombusz, tehát a trapéz három egybevágó szabályos háromszögből áll, melyek oldala 6 egység. Az $E$ pont vetülete az alapsíkon legyen $K$. Ekkor a $KAE$ és $KBE$, illetve a $KCE$ és $KDE$ háromszögek egybevágóak, így $K$ a trapéz köré írt kör középpontja, tehát azonos $T$-vel.

A trapéz területe $27\sqrt{3}$, így $\frac{27\sqrt{3} \cdot m}{3} = 162$-ből a test $m$ magassága $6\sqrt{3}$. A keresett szög hegyes, értéke így $60°$.

**5.** *Egy háromszög egyik oldalát a szemben fekvő szög harmadoló egyenesei 5, 6 és 9 egységnyi szakaszokra bontják. Határozzuk meg az ezzel az oldallal szembeni szög koszinuszának pontos értékét.*

**Megoldás.** Ha az $A$ csúcsból induló szögharmadoló egyenesek a $BC$ oldalt a $D$ és $E$ pontokban metszik, akkor a szögfelezőtétel miatt $AB = 5x$, $AD = 2y$, $AE = 6x$ és $AC = 3y$. Az $ABE$ háromszög területét kétféleképpen felírva az

$$\frac{5x \cdot 2y \cdot \sin\alpha}{2} + \frac{2y \cdot 6x \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{5x \cdot 6x \cdot \sin 2\alpha}{2}$$

egyenlethez jutunk. Ebből $11y = 30x \cdot \cos\alpha$.

Az $ADC$ háromszög területéből hasonló módon a $15x = 6y \cdot \cos\alpha$ összefüggéshez jutunk. Ebből $\frac{y}{x} = \sqrt{\frac{75}{11}}$, majd $\cos\alpha = \sqrt{\frac{11}{12}}$. A $\cos 3\alpha$-ra a $\frac{\sqrt{33}}{9}$ értéket kapjuk.

**6.** *Adjuk meg a*

$$2\sin\frac{2002^{100}\cdot\pi}{-3}\cdot 5^{\frac{1}{\log_3 25}}=\left|\sqrt{x^2-2x+1}-4\right|$$

*egyenlet legkisebb pozitív megoldását!*

**Megoldás.** Mivel 2002 páros és 3-mal osztva 1 maradékot ad, azért $2002^{100}$ is ilyen. Így $2002^{100}$ 6-tal osztva 4 maradékot ad. Ezért

$$2\sin\left(-2002^{100}\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$$
$$5^{\frac{1}{\log_3 25}}=5^{\log_{25}3}=25^{\frac{1}{2}\log_{25}3}=\sqrt{3}.$$

Így az egyenlet bal oldalának az értéke 3. A jobb oldal $\big||x-1|-4\big|$ alakban írható, a 3 értéket négy helyen veszi föl. Közülük a legkisebb pozitív a 2, ez a megoldás.

**7.** *Milyen $p$ és $q$ pozitív prímpárokra lesz a*

$$(p^2-pq-2q^2)x^2-3q^2x-(2p+0{,}5)=0$$

*egyenletnek egy valós gyöke?*

**Megoldás.** $p^2-pq-2q^2=0$ esetén $(p-2q)(p+q)=0$. A $p=2q$ és $p+q=0$ esetek nem adnak megoldást. $p^2-pq-2q^2\neq 0$ fennállásakor $D=0$ szükséges.

$$D=9q^4+4(2p+0{,}5)(p^2-pq-2q^2)=9q^4+2(4p+1)(p^2-pq-2q^2)=0$$

A bal oldal második tagja páros, így $q=2$ lehet csak. Ezt beírva:

$$9\cdot 2^4+2(4p+1)(p^2-2p-8)=0,\quad -4p^3-7p^2-34p+64=0.$$

Ha egyenlőség van, akkor a bal oldal egyetlen páratlan együtthatójú tagja, $-7p^2$ is páros, így csak $p=2$ lehetséges és ez valóban megoldás.

**8.** *Mely valós számokra értelmezhető a*

$$\sqrt{\frac{2^{-x+1}-0{,}5}{\log_x(x^2+x)}}$$

*kifejezés?*

**Megoldás.** $\dfrac{2^{-x+1}-0{,}5}{\log_x(x^2+x)}\geq 0$ szükséges. A számláló nemnegatív és a nevező pozitív, az alap 1-nél nagyobb esetből az $1<x\leq 2$-t kapjuk. A számláló nemnegatív és a nevező pozitív, 1-nél kisebb alap esetén a $0<x<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ intervallum adódik.

A számláló nempozitív, a nevező negatív esetekből nem kapunk megoldást.