

1. Egy téglalap oldalai 15,6 és 18 egység hosszúak. Írjunk a téglalapba olyan téglalapot, amelynek egyik oldala a másik oldal háromszorosa és az adott téglalap minden oldalára pontosan egy csúcsa illeszkedik a beírt téglalaphoz. Mekkora a beírt téglalap oldalai?

Megoldás. Legyen a beírt téglalap rövidebb oldala a , ekkor a másik oldal $3a$. A beírt téglalap oldalai 2-2 egybevágó háromszöget vágnak le, amelyek átfogói a illetve $3a$ egység. Ezek a háromszögek egymáshoz hasonlóak. Így ha a kisebb háromszög befogói x és y , akkor a nagyobbaké $3x$ és $3y$. Az eredeti téglalap oldalait x -szel és y -nal kifejezhetjük: $x + 3y = 15,6$ és $3x + y = 18$, ahonnan $x = 3,6$ és $y = 4,8$ és $a^2 = 3,6^2 + 4,8^2$, $a^2 = 36$, $a = 6$. A beírt téglalap oldalai 6 és 18 egység hosszúak.

2. a) Igazoljuk, hogy minden háromszögben $\operatorname{ctg} \alpha \sin \gamma + \cos \gamma = \frac{b}{a}$, ahol α az a , γ a c oldallal szemközi szög.
 b) Egy háromszögben $b = 2a$ és $\gamma = 60^\circ$. Számítsuk ki a háromszög másik két szögét!

Megoldás. a) Vegyük figyelembe, hogy

$$\sin \beta = \sin (180^\circ - (\alpha + \gamma)) = \sin (\alpha + \gamma),$$

és alkalmazzuk a szinusztételt:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma}{\sin \alpha} = \cos \gamma + \operatorname{ctg} \alpha \sin \gamma.$$

- b) Most $\frac{b}{a} = 2$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, így $2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ctg} \alpha$, ahonnan $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$, $\alpha = 30^\circ$ és így $\beta = 90^\circ$.

3. Az (a_n) mértani sorozat tagjaira $a_1 + a_3 + a_5 = 133$ és $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_5} = \frac{133}{1296}$. Írjuk fel a sorozat első öt tagját!

Megoldás. A feltételek szerint

$$a_1 + a_1 q^2 + a_1 q^4 = 133 \quad \text{és} \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 q^2} + \frac{1}{a_1 q^4} = \frac{133}{1296}.$$

Ez utóbbi egyenletből az első egyenlet felhasználásával

$$\frac{a_1(q^4 + q^2 + 1)}{a_1(a_1 q^4)} = \frac{133}{1296}, \quad (a_1 q^2)^2 = 36^2.$$

Ha $a_1 q^2 = 36$, akkor az első egyenletből $36q^4 - 97q^2 + 36 = 0$, ha $a_1 q^2 = -36$, akkor hasonlóan $36q^4 + 169q^2 + 36 = 0$.

Az első esetben $q^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$, $a_1 = 16$, így az első öt tag 16, 24, 36, 54, 81 vagy 16, -24, 36, -54, 81, a második esetben

$q^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$, $a_1 = 81$, így az első öt tag 81, 54, 36, 24, 16 vagy 81, -54, 36, -24, 16.

4. Egy bankba 3 évre elhelyeztünk 40 000 forintot kamatos kamatra. Az első évben a bank 10%-os kamatot számolt el, a második évben a kamatlábat $p\%$ -kal növelte, a harmadik évben újabb $p\%$ -kal növelte. Így módon a harmadik év végén 2939,20 Ft-tal többet fizettek ki, mint amennyit a három éven át a 10%-os kamatláb mellett kellett volna. Számítsuk ki p értékét!

Megoldás. A feltételek szerint

$$40\,000 \cdot 1,1 \cdot \left(1 + \frac{10+p}{100}\right) \left(1 + \frac{10+2p}{100}\right) = 40\,000 \cdot 1,1^3 + 2939,20.$$

Innen

$$\left(1,1 + \frac{p}{100}\right) \left(1,1 + \frac{2p}{100}\right) = 1,2768.$$

Legyen $\frac{p}{100} = z$, ekkor $2z^2 + 3,3z - 0,0668 = 0$. Mivel $z > 0$, ezért $z = 0,02 = \frac{2}{100}$, tehát $p = 2$.

5. Az (x, y) síkbeli $ABCD$ négyszög A csúcsa az origóban van, B csúcsa az y tengelyen, C csúcsa az első síknegyedben, D csúcsa az x tengely pozitív felén helyezkedik el. A BC oldal egyenesének egyenlete: $2x + y = 12$. A CD oldal merőleges a BC oldalra. A négyszög területe 31 területegység. Határozzuk meg a B , C és D csúcspontok koordinátáit!

Megoldás. A B pont koordinátái $B(0; 12)$. Legyen a D pont első koordinátája d , azaz $D(d; 0)$. A CD egyenes egyenlete $x - 2y = d$. A BC és CD egyenesek C metszéspontja koordinátái d -vel kifejezve $x = \frac{1}{5}(24 + d)$, $y = \frac{2}{5}(6 - d)$. Mivel C az első síknegyedben van, $d < 6$. Legyen E a BC egyenes és az x tengely metszéspontja, ekkor $E(6; 0)$.

A BAD háromszög területe 36 területegység, a CDE háromszög területe d -vel kifejezve $\frac{1}{2}(6-d) \cdot \frac{2}{5}(6-d)$. Így

$$36 = 31 + \frac{1}{5}(d-6)^2, \quad (d-6)^2 = 5^2,$$

ahonnan $d = 1$ vagy $d = 11$. Most csak a $d = 1$ lehetséges, hiszen $d < 6$. Ha $d = 1$, akkor $D(1; 0)$ és $C(5; 2)$.

6. Egy forgáscsonkakúp alap-, illetve fedőkörének sugara R illetve r ($R > r$). Egy, az alapokkal párhuzamos sík két olyan részre osztja a csonkakúpot, hogy a nagyobb sugarú résznél keletkező csonkakúp térfogata harmada az eredeti csonkakúp térfogatának. Fejezzük ki R -rel és r -rel a síkmetszet sugarát!

Megoldás. Legyen a csonkakúp térfogata $3V$, a kiegészítő kúp térfogata V_1 , a kimetszett kör sugara x . A hasonló testek térfogatának aránya egyenlő a megfelelő szakaszok köbének arányával. Ezért

$$\frac{V_1 + 3V}{V_1} = \frac{R^3}{r^3} \quad \text{és} \quad \frac{V_1 + 2V}{V_1} = \frac{x^3}{r^3},$$

$$1 + 3 \cdot \frac{V}{V_1} = \frac{R^3}{r^3} \quad \text{és} \quad 1 + 2 \cdot \frac{V}{V_1} = \frac{x^3}{r^3}.$$

Az egyenlő együtthatók módszerével $\frac{V}{V_1}$ kiküszöbölhető: $1 = \frac{3x^2 - 2R^3}{r^3}$, ahonnan a kimetszett kör sugara

$$x = \sqrt[3]{\frac{r^3 + 2R^3}{3}}.$$

7. Igazoljuk, hogy a $(\sin x - \sqrt{3} \cos x) \cdot \cos 4x = 2$ egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán.

Megoldás. Az egyenlet mindkét oldalát 2-vel osztva

$$\left(\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) \cdot \cos 4x = 1.$$

Mivel $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$ és $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$, ezért az egyenlet:

$$\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \cdot \cos 4x = 1.$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha $\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 1$ és $\cos 4x = 1$ vagy $\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = -1$ és $\cos 4x = -1$, tehát

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{és} \quad 4x = 2n\pi, \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

vagy

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{és} \quad 4x = \pi + 2n\pi, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Innen $6x = 5\pi + 12k\pi$ és $6x = 3n\pi$ vagy $12x = 22\pi + 24k\pi$ és $12x = 3\pi + 6k\pi$, azaz $3n - 12k = 5$ vagy $6n - 24k = 19$, ahol k és n egészek.

Ezek az egyenletek egyetlen (n, k) egész számokból álló számpárra sem teljesülnek, hiszen az első esetben a bal oldal osztható 3-mal, a jobb oldal nem, a második esetben a bal oldal páros, a jobb oldal páratlan, tehát az egyenletnek nincs megoldása.

8. Tekintsük a $4^x + 2(n+1) \cdot 2^x + n^2 = 8$ egyenletet, ahol az n paraméter egész szám ($n \in \mathbb{Z}$).

a) Milyen n esetén van az egyenletnek két különböző megoldása a valós számok halmazán?

b) Milyen n esetén van az egyenletnek pontosan egy megoldása?

Adjuk meg a lehetséges gyökök értékét is!

Megoldás. a) A 2^x -re másodfokú egyenletnek akkor van két különböző megoldása, ha az egyenlet diszkriminánsa pozitív, és mindkét megoldás pozitív, hiszen $2^x > 0$.

$$D = 4(n+1)^2 - 4(n^2 - 8) \equiv 4(2n+9) > 0, \quad n > -\frac{9}{2}.$$

Ha $D > 0$, akkor a másodfokú egyenlet két gyöke pontosan akkor pozitív, ha összegük is és szorzatuk is pozitív: $-2(n+1) > 0$ és $n^2 - 8 > 0$. Ezek együtt akkor teljesülnek, ha $-\frac{9}{2} < n < -\sqrt{8}$, ezért $n = -4$ vagy $n = -3$.

Ha $n = -4$, akkor $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$, $2^x = 4$ vagy $2^x = 2$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

Ha $n = -3$, akkor $4^x - 4 \cdot 2^x + 1 = 0$, $2^x = 2 + \sqrt{3}$ vagy $2^x = 2 - \sqrt{3}$, $x_3 = \log_2(2 + \sqrt{3})$, $x_4 = \log_2(2 - \sqrt{3})$.

b) Pontosán egy megoldás akkor van, ha $D = 0$ és $2^x > 0$, vagy $D > 0$ és 2^x egyik értéke pozitív, a másik negatív, a szorzatuk, $n^2 - 8$ tehát negatív. Az első eset nem lehetséges, hiszen $D = 0$ akkor teljesül, ha $n = -\frac{9}{2}$, ami nem egész.

Ha $D > 0$, azaz $-\frac{9}{2} < n$ és $n^2 - 8 < 0$, akkor $-\sqrt{8} < n < \sqrt{8}$, azaz $n = -2$, $n = -1$, $n = 0$, $n = 1$ vagy $n = 2$.

Ha $n = -2$, akkor $2^x = 1 + \sqrt{5}$, $x_6 = \log_2(1 + \sqrt{5})$; ha $n = -1$, akkor $2^x = \sqrt{2}$, $x_7 = \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$; ha $n = 0$, akkor $2^x = 2$, $x_8 = 1$; ha $n = 1$, akkor $2^x = -2 + \sqrt{11}$, $x_9 = \log_2(-2 + \sqrt{11})$ végül ha $n = 2$, akkor $2^x = -3 + \sqrt{13}$, $x_{10} = \log_2(-3 + \sqrt{13})$.