1. *Tekintsük az $x^2+4kx+4(2k-1)=0$ egyenletet, ahol k valós paraméter. Igazoljuk, hogy az egyenletnek minden valós k esetén van valós megoldása. Oldjuk meg az egyenletet, ha a gyökök négyzetének összege a lehető legkevesebb.*

Megoldás. Az egyenlet diszkriminánsa $D=16k^2-16(2k-1)\equiv\big(4(k-1)\big)^2\geq 0$ minden valós k-ra, így valóban mindig van megoldás. Most $x_1=-2$, $x_2=-4\left(k-\dfrac{1}{2}\right)$, ezért $x_1^2+x_2^2=4+16\left(k-\dfrac{1}{2}\right)^2$, ami akkor a legkevesebb, ha $k=\dfrac{1}{2}$. Ekkor $x_1=-2$, $x_2=0$.

Megjegyzés: A feladat második része a gyökök és együtthatók közötti összefüggések felhasználásával is megoldható:

$$x_1^2+x_2^2\equiv(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=16k^2-8(2k-1)\equiv 16\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+4.$$

2. *Igazoljuk, hogy egy rombusz oldala pontosan akkor (akkor és csak akkor) mértani közepe a rombusz átlóinak, ha a rombusz hegyesszöge 30°.*

Megoldás. Jelölje a rombusz oldalát a, a két átlót e és f.

Ha a rombusz hegyesszöge $\alpha=30^\circ$, akkor a rombusz magassága $m=\dfrac{a}{2}$. A rombusz területe egyrészt $T=\dfrac{a^2}{2}$, másrészt $T=\dfrac{ef}{2}$, így $a^2=ef$, tehát a az e és f mértani közepe ($a>0$, $e>0$, $f>0$).

Ha $a^2=ef$, akkor $T=a^2\sin\alpha$ és $T=\dfrac{ef}{2}$ miatt $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\alpha=30^\circ$, mert α hegyesszög.

3. *Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:*

$$a)\quad \sqrt[3]{15+2x}+\sqrt[3]{13-2x}=4;\qquad b)\quad \log_x 3\cdot\log_{\frac{x}{3}}3+\log_{\frac{x}{81}}3=0;$$

$$c)\quad \cos^4 x+\cos^4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}.$$

Megoldás. *a)* Az egyenlet minden valós számra értelmezett. Emeljük köbre az egyenlet mindkét oldalát (ez ekvivalens átalakítás) és alkalmazzuk az

$$(a+b)^3\equiv a^3+b^3+3ab(a+b)$$

azonosságot:

$$15+2x+13-2x+3\cdot4\cdot\sqrt[3]{(15+2x)(13-2x)}=64,$$

$$\sqrt[3]{-4x^2-4x+195}=\sqrt[3]{27},$$

ahonnan $x_1=6$, $x_2=7$, és ezek valóban megoldások.

b) Az egyenlet akkor értelmezett, ha $x>0$ és $x\neq1$, $x\neq3$, $x\neq81$. Alkalmazzuk az $\log_a b\equiv\dfrac{1}{\log_b a}$ ($a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$) és az $\log_a\dfrac{x}{y}\equiv\log_a x-\log_a y$ ($x>0$, $y>0$, $a>0$, $a\neq1$) azonosságokat. Ekkor

$$\frac{1}{\log_3 x}\cdot\frac{1}{\log_3 x-1}+\frac{1}{\log_3 x-4}=0,$$

ahonnan $\log_3 x=2$ vagy $\log_3 x=-2$. Az egyenlet megoldásai: $x_1=9$, $x_2=\dfrac{1}{9}$.

c) Alkalmazzuk a $\cos^2\alpha\equiv\dfrac{1}{2}(1+\cos2\alpha)$, valamint a $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\equiv\sin\alpha$ és $\cos(-\alpha)\equiv\cos\alpha$ azonosságokat.

$$\left(\frac{1+\cos2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)^2=\frac{1}{4},$$

$$1+2\cos2x+\cos^2 2x+1+2\sin2x+\sin^2 2x=1,$$

$$\left(\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\equiv\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\equiv\sin2x\right),$$

$$\sin2x+\cos2x=-1.$$

Ez utóbbi egyenlet sokféle módon oldható meg. Az egyenlet azokra az x-ekre igaz, amelyekre $\sin2x=-1$ és $\cos2x=0$ vagy $\sin2x=0$ és $\cos2x=-1$, azaz ha $x_k=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$) vagy $x_n=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ ($n\in\mathbb{Z}$). ($\sin2x+2\cos^2x=0$, $2\cos x(\sin x+\cos x)=0$.)

4. *Az ABC háromszögben $AC = 5{,}8$, $BC = 5$ egység, az AB oldalhoz tartozó magasság $m_c = 4$ egység. Számítsa ki a háromszög köré írt kör sugarát és a háromszög területét.*

Megoldás. A háromszög területe egyrészt $T = \dfrac{c \cdot m_c}{2}$, másrészt $T = \dfrac{abc}{4r}$, ahol r a háromszög köré írt kör sugara. $\dfrac{c \cdot 4}{2} = \dfrac{5{,}8 \cdot 5 \cdot c}{4r}$, ahonnan $r = 7{,}25$ egység. A feltételeknek két háromszög felel meg. Erre a megállapításra szerkesztés lehetőségének elemzése, *előjeles* szakasszal való számolás vagy trigonometria alkalmazásával juthatunk. Pl. legyen $CBA\sphericalangle = \beta$. Ekkor $\sin\beta = \dfrac{4}{5}$, így $\cos\beta = \dfrac{3}{5}$ vagy $\cos\beta = -\dfrac{3}{5}$. Koszinusztételekkel $5{,}8^2 = 5^2 + c^2 - 2 \cdot 5 \cdot c \cdot \dfrac{3}{5}$ vagy $5{,}8^2 = 5^2 + c^2 + 2 \cdot 5 \cdot c \cdot \dfrac{3}{5}$, ahol $c > 0$, így $c = 7{,}2$ vagy $c = 1{,}2$, tehát a háromszög területe $T = \dfrac{7{,}2 \cdot 4}{2} = 14{,}4$ vagy $T = \dfrac{1{,}2 \cdot 4}{2} = 2{,}4$ területegység.

5. *Igazoljuk, hogy minden n pozitív egész számra*
a) $36^n + 10 \cdot 3^n$ *osztható* 11-*gyel;*
b) $4^{2n} - 3^{3n} - 7$ *osztható* 84-*gyel!*

Megoldás. *a)* A binomiális tétel alkalmazásával

$$36^n + 10 \cdot 3^n \equiv (33+3)^n + 10 \cdot 3^n = 33 \cdot k + 3^n + 10 \cdot 3^n = 11 \cdot (3k + 3^n).$$

(A kifejezés osztható $3 \cdot 11 = 33$-mal.)

$$\big(36^n + 10 \cdot 3^n = 3^n(12^n + 10) = 3^n\big((12^n - 1^n) + 11\big) = 33k.\big)$$

b) Az eredeti állítás már $n = 1$-re sem igaz.

Helyesbítés: Az eredeti feladat helyesen a következő:
b) $4^{2n} - 3^{2n} - 7$ *osztható* 84-*gyel!*
Ismeretes, hogy $a^n - b^n$ osztható $(a - b)$-vel.

$$4^{2n} - 3^{2n} - 7 = 16^n - 9^n - 7 = (16 - 9)k - 7 = 7m;$$

$$4^{2n} - 3^{2n} - 7 = \big(4^{2n} - 1\big) - 3^{2n} - 6 = (4 - 1)k - 3l = 3m;$$

$$4^{2n} - 3^{2n} - 7 = \big(4^{2n} - 8\big) - \big(3^{2n} - 1\big) = 8k - 8l = 8m.$$

Az adott kifejezés tehát osztható 7-tel, 3-mal és 8-cal, mivel ezek relatív prímszámok, ezért osztható a szorzatukkal $3 \cdot 7 \cdot 8$-cal, 168-cal is. (No persze így 84-gyel is.)

6. *a) Tekintsük azt az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ függvényt, ahol*

$$f(x) = (ax + b)^2 + (cx + d)^2,$$

ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ és $ac \neq 0$. Az f függvény melyik x helyen veszi fel a legkisebb értékét, és mennyi ez a legkisebb érték?

b) Melyik az a legbővebb halmaz, amelyre a $g(x) = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x}$ értelmezhető? Tekintsük az ezen a halmazon értelmezett $x \mapsto g(x)$ függvényt. Felveszi-e a g függvény a legnagyobb, illetve a legkisebb értéket? Ha felveszi, akkor melyik x helyen veszi fel és mennyi a függvény szélsőértéke?

Megoldás. *a)* $f(x) = \big(a^2 + c^2\big)x^2 + 2(ab + cd)x + b^2 + d^2$. Azonos átalakításokkal

$$f(x) = \big(a^2 + c^2\big)\left(x + \frac{ab + cd}{a^2 + c^2}\right)^2 + \frac{(ad - bc)^2}{a^2 + c^2}.$$

A függvény az $x_0 = -\dfrac{ab + cd}{a^2 + c^2}$ helyen veszi fel a legkisebb értékét, a legkisebb érték: $\dfrac{(ad - bc)^2}{a^2 + c^2}$.

b) A $g(x)$ kifejezés akkor értelmezhető, ha $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} 2x$ értelmezhető és ha $1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \neq 0$. Ez utóbbi minden megengedett x-re teljesül, így $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $2x \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, $x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{n \cdot \pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Minden más valós számra értelmezhető a $g(x)$.

Azonos átalakításokkal

$$\frac{1}{1 + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin 2x}{\cos 2x}} \equiv \frac{\cos x \cdot \cos 2x}{\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x} \equiv \frac{\cos x \cos 2x}{\cos x} \equiv \cos 2x.$$

A megadott halmazon a függvény legnagyobb értéke 1, amit az $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ helyeken vesz fel. A függvény a legkisebb értékét soha nem veszi fel. ($\cos 2x = -1$, ha $x_n = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. x_n nem tartozik az értelmezési tartományba.)

7. *Igazoljuk, hogy az $A(1;-1)$, $B(3;3)$ és $C(4;5)$ pontok egy egyenesre illeszkednek. Milyen arányban osztja a B pont az AC szakaszt? Mi azon P pontok halmaza és annak egyenlete, amelyekre $\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{AB}{BC}$?*

Helyesbítés: Az utolsó képlet helyesen: $\dfrac{AP}{PC}=\dfrac{AB}{BC}$.

Megoldás. Mivel $\overrightarrow{AB}=(2;4)$ és $\overrightarrow{BC}=(1;2)$, ezért A, B és C egy egyenesre illeszkednek és $AB=2BC$.

Azon $P(x,y)$ pontok halmazát keressük, amelyekre $\dfrac{AP}{PC}=2$, azaz $AP=2\cdot PC$. Mivel $AP\geq 0$ és $PC\geq 0$, ezért a négyzetemeléssel kapott egyenlet, $AP^2=4\cdot PC^2$, ekvivalens a feltételi egyenlettel, így

$$(x-1)^2+(y+1)^2=4\big((x-4)^2+(y-5)^2\big). \tag{1}$$

Innen azonos átalakítással és egyenletrendezéssel a következő, a feltételi egyenlettel ekvivalens egyenlethez jutunk:

$$(x-5)^2+(y-7)^2=20. \tag{2}$$

A keresett ponthalmaz tehát körvonal, amelynek középpontja $K(5;7)$, sugara $r=2\sqrt{5}$.

Megjegyzés: az eredeti szövegezéssel is megoldható a feladat, csak a kör egyenlete nem ilyen „szép". Így a megfelelő egyenletek:

$$(x-1)^2+(y+1)^2=4\big((x-3)^2+(y-3)^2\big). \tag{1}$$

Innen azonos átalakítással és egyenletrendezéssel a következő, a feltételi egyenlettel ekvivalens egyenlethez jutunk:

$$\left(x-\frac{11}{3}\right)^2+\left(y-\frac{13}{3}\right)^2=\frac{80}{9}. \tag{2}$$

8. *Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a*

$$\cos 2x+(1-2\sin y)\cos x+1-\sin y=0$$

kétismeretlenes egyenletet.

Megoldás. $\cos 2x+1\equiv 2\cos^2 x$, így

$$2\cos^2 x+(1-2\sin y)\cos x-\sin y=0,$$

ahonnan $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ vagy $\cos x=\sin y$. Az előbbi megoldásai

$$x_{1,k}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\quad y_{1,k}\in\mathbb{R}\quad \text{vagy}\quad x_{2,n}=\frac{4\pi}{3}+2n\pi,\quad y_{2,n}\in\mathbb{R}.$$

A másik esetben $\cos x=\sin y$, azaz $\cos x=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)$, tehát $x=\dfrac{\pi}{2}-y+2k\pi$ vagy $x=y-\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$. Innen a megoldások:

$$x_{1,k}=\frac{\pi}{2}-t+2k\pi,\quad y_{1,k}=t,\quad k\in\mathbb{Z},\ t\in\mathbb{R}$$

vagy

$$x_{2,n}=t-\frac{\pi}{2}+2n\pi,\quad y_{2,n}=t,\quad n\in\mathbb{Z},\ t\in\mathbb{R}.$$